

FTAMP 30.19.21

К. Бисембаев¹ – негізгі автор, | ©
С.М. Тезекеев², А. Байчапанова³



¹Техн. ғылым. д-ры, профессор, ²Аға оқытушы, ³Магистрант

ORCID

¹<https://orcid.org/0000-0001-6372-8988> ²<https://orcid.org/0009-0007-0813-9954>

³<https://orcid.org/0009-0002-9492-9031>



¹У.А. Жолдасбеков атындағы Механика және машина тану институты,

^{2,3}Абай атындағы қазақ ұлттық педагогикалық университеті,



^{1,2,3}Алматы қ., Қазақстан Республикасы



¹kuat_06@mail.ru

<https://doi.org/10.55956/XZQS1818>

ТЕҢСЕЛМЕЛІ ТІРЕККЕ ОРНАЛАСТЫРЫЛҒАН, ШОҒЫРЛАНҒАН ЖҮКТЕМЕСІ БАР СЕРПІМДІ СЫРЫҚТЫҢ ПАРАМЕТРЛІК ТЕРБЕЛІСІН ЗЕРТТЕУ

Аңдатпа. Жұмыста релаксацияланатын жер қабатындағы дөңгелеу үйкелісін ескерген жағдайда түзетілетін беттермен шектелген дірілтірегіне орнатылған шоғырланған жүктемелері бар серпімді сырықтың параметрлік тербелісі зерттеледі. Жүйенің қозғалыс теңдеуі алынған. Жүйенің тербелмелі процесінің стационар режимі зерттелген және орнықтылық критеріі анықталған. Негізгі элементтері жоғары ретті айналу беттерімен шектелген теңселмелі тірек болып табылатын кинематикалық дірілді оқшаулау қондырғысына орнатылған шоғырланған жүктемелері бар серпімді сырықтардың негізгі динамикалық қасиеттері нақтыланды. Олар кинематикалық тіректердің тиісті өлшемдерін және шоғырланған жүктемелері бар серпімді сырықтардың динамикалық параметрлерін тағайындау арқылы дірілді оқшаулау жүйесін кез келген жиілікке мақсатты түрде реттеуге, дірілден қорғау жүктемесінің қайта таралуының қауіпті әсерін болдырмауға, резонансты тербелістерден қашуға, кинематикалық оқшаулауы бар серпімді құрылғыға әсер ететін вертикаль қоздырудың әсерін азайтуға немесе жоюға септігін тигізеді.

Тірек сөздер: дірілден қорғау, дірілтірек, меншікті форма, шоғырланған жүктемесі бар серпімді сырық, параметрлік тербеліс.



Бисембаев, К. Теңселмелі тірекке орналастырылған, шоғырланған жүктемесі бар серпімді сырықтың параметрлік тербелісін зерттеу [Мәтін] / К. Бисембаев, С.М. Тезекеев, А. Байчапанова // Механика және технологиялар / Ғылыми журнал. – 2024. – №1(83). – Б.281-291. <https://doi.org/10.55956/XZQS1818>

Кіріспе. Сейсмикалық оқшаулағыш құрылғылардың кластары арасында кинематикалық фундаменттер деп аталатындар айрықша ерекшеленеді, олардың негізгі элементтері әртүрлі ретті айналу беттерімен шектелген теңселмелі тірегі болып табылады.

Алайда, мұндай жүйелерді кеңінен қолдануға кедергі келтіретін себептердің бірі сыртқы әсер кезінде негізгі элементі теңселмелі тірек болатын кинематикалық іргетасқа орнатылған ғимараттардың динамикасын жеткіліксіз зертеу жүргізгеннен болады.

Жанасу орнында түзетілетін, жоғарғы ретті айналу беттерімен шектелген дірілден қорғайтын теңселмелі тіректің, элементтері уақыт

бойынша реалогиялық деформацияланып, шекті жанасу ауданына ие болатын тіректердің динамикалық қасиеттерін зерттеуді Бисембаев Қ. жасады [1-2].

Бисембаев Қ. [3] жұмысында, релаксацияланатын жер қабатында жанасу беттері бойымен жерге тіректің түсіретін қысым күштерінің асимметриялы таралуынан болатын, жоғары ретті айналу беттерімен шектелген абсолютті теңселмелі тіректің дөңгелеу үйкелісі зерттелген.

Соңғы бірнеше онжылдықта аналитикалық немесе сандық шешімдерді ұсынатын көптеген басылымдар, біртекті емес арқалықтардың және бірқалыпта айналмалы қозғалыс жасайтын арқалықтардың көлденең тербелістеріне арналған.

Біртекті емес арқалықтардың көлденең тербелістерін басқаратын дифференциалдық теңдеулерінің сипаттамалық ерекшелігі, олар коэффициенттері айнымалы төртінші ретті сызықтық теңдеулер болып табылады.

Біртекті емес арқалықтардың көлденең тербелістерін олардың құрылыстағы маңыздылығына байланысты көптеген зерттеушілер зерттеді. Бұл зерттеулер аналитикалық немесе жуықтау шешімдерді ұсынады [9-13].

Аналитикалық шешімдер ортогональды полином түрінде [4], Бессел функциясы түрінде [5], гипергеометриялық қатар түрінде [6], Фробениус әдісімен алынған дәрежелік қатар түрінде [7] алынған.

Біртекті емес сәулелердің қозғалыс теңдеулері кейбір біртекті сәулелердің қозғалысын сипаттайтын теңдеулерге түрлендірілетін әдіс [8] берілген. Тестік функциялар ретінде ортогональды полиномдарды [8] немесе Фурье қатарын [9] пайдаланатын Рэйлей-Риц әдісі сияқты жуық әдістер, Ритц әдісі [10], Галеркин әдісі [11], ақырғы айырымдық әдісі [12] немесе ақырғы элементтер әдісі [13], біртекті емес арқалықтың жуық меншікті жиіліктерін табу үшін пайдаланылды.

Жұмыстың мақсаты: релаксацияланатын жер қабатында дөңгелеу үйкелісі бар жағдайда, жоғары ретті айналу беттерімен шектелген теңселмелі тірегі бар дірілден қорғау құрылғысына орналастырылған, шоғырланған жүктемелері бар серпімді сырықтар үшін сызықты емес параметрлік тербелістердің математикалық теориясын құру.

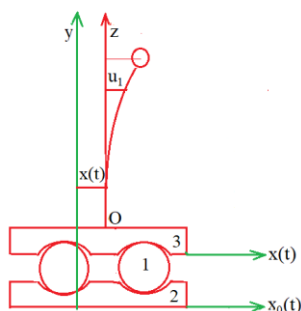
Зерттеу шарттары мен әдістері. Кинематикалық іргетастардың жұмыс істеу принципі ғимараттың төменгі қабаты мен қозғалмайтын іргетас арасына жылжымалы тірек элементтерін – белгілі бір конфигурация түріндегі айналу денесін орнату болып табылады. Бұл элементтер ғимараттар табанының стационарлық іргетасқа қатысты жылжымалы болуына мүмкіндік береді.

Түзетілген беттермен шектелген теңселмелі тіректен тұратын дірілден қорғау құрылғылар жобасының негізгі элементтері (1-сурет):

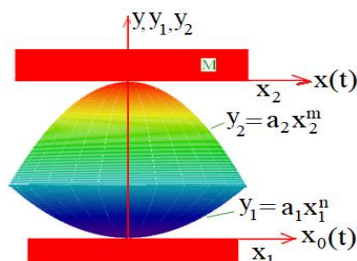
- жоғары ретті айналу беттерімен шектелген қатты тіректік элементтер;
- тіректер орнатылатын тіреуіш фундаменттер плитасы (тақтасы);
- ғимараттардың төменгі қабатының тіректік беттері.

Кинематикалық фундаменттердің көмегімен жоғарыда сипатталған ғимараттарды сейсмоқшаулау әдісі, оқшауланатын объектіге берілетін жүктемелерді, оның салыстырмалы қозғалысы арқылы айтарлықтай төмендетеді. Бұл қозғалысты шектеу, сипатталған динамикалық жүйеге белгілі бір зерттеулер мен талдаулар жасауды талап етеді. Дөңгелеу үйкелісін ескере отырып, жоғары ретті айналу беттерімен шектелген, теңселмелі тірекке орнатылған шоғырланған жүктемелері бар серпімді сырықтардың тербелісі туралы мәселені тұжырымдап көрейік.

Бұл механикалық модельдің тербелмелі қозғалысы серпімді құрылымдардың инерция күштерінің, серпімділік күштерінің, ауырлық күштерінің, сонымен қатар дөңгелеу үйкеліс күштерінің, ішкі үйкеліс күштерінің және сыртқы әсерлердің өзара әрекеттесуінен туындайды. Кинематикалық іргетас моделі 2-суретте көрсетілген.



Сурет 1. Жылжымалы негіздері бар жылжымалы тіректердегі серпімді құрылымның тербеліс сұлбасы



Сурет 2. Жоғары ретті тірек беттері бар жылжымалы тіректің сұлбасы

1 дене – жалпы симметрия осі бар, жоғары және төменгі жағынан (1) формуламен өрнектелетін жоғары ретті айналу беттерімен шектелген теңселмелі тірек, ал 2 және 3 денелер – стационар табан (іргетас) және дірілден қорғалатын нысанның төменгі қабаты. Мұндай тіректің ерекшелігі орталық тірек нүктелерінің маңайындағы қисықтық радиус шексіздікке ұмтылады және симметрия осінен қашықтаған сайын азаяды, яғни орталық нүктеге жақын жерде тірек беттерінің түзетілуі байқалады. n шексіздікке ұмтылғанда ($n \rightarrow \infty$), 1 теңселмелі тірек цилиндрлік пішінге ие болады.

$$y_1 = a_1 x_1^n \text{ и } y_2 = a_2 x_2^m \quad (1)$$

Табанның көлденең жылжуы $x_0(t)$ арқылы белгіленген. Теңселмелі тірекке орнатылған шоғырланған жүктемесі бар серпімді сырықтың төменгі табанының орын ауыстыруын $x(t)$ деп белгілейік. $n=m$ жағдайында, теңселмелі тірекке орнатылған шоғырланған жүктемесі бар серпімді сырықтың төменгі табанының горизонталь орын ауыстыруы мен вертикаль орын ауыстырулары арасындағы байланыс [1] келесі түрде болады:

$$\Delta y = y(t) - y_0(t) = -\frac{1}{2H} (x - x_0)^2 + \frac{(n-1)}{nH} N_n (x - x_0)^{\frac{n}{n-1}} \quad (2)$$

$$\text{мұндағы: } N_n = \frac{1}{(nH)^{\frac{1}{n-1}}} \left(\frac{1}{n-1} \sqrt[n-1]{a_1} + \frac{1}{n-1} \sqrt[n-1]{a_2} \right) \quad (3)$$

Түзетілген беттермен шектелген теңселмелі тірекке орнатылған дене табанының салыстырмалы горизонталь ығысуы мен вертикаль ығысуы арасындағы байланысты анықтайтын (2) өрнекті голономдық байланыстар деп санауға болады. $n=m$ болған кездегі, жоғары ретті айналу беттерімен

шектелген теңселмелі тірек үшін дөңгелеу үйкеліс күштерінің формуласы мынадай түрде болады [3]:

$$F = \varepsilon \frac{PN_n}{(n-1)H} \frac{\dot{x} - \dot{x}_0}{(x - x_0)^{\frac{n-2}{n-1}}} \quad (4)$$

мұндағы: ε – жер қабатының релаксация периоды; P – дірілден қорғалатын дененің салмағы.

Фохта бойынша, сырықтың ішкі кедергі күші мына түрде қабылданады:

$$R = \mu EJ \frac{\partial^5 u_1(z, t)}{\partial t \partial z^4} \quad (5)$$

мұндағы: EJ – майысу қатандығы; E – серпімділік модулі; J – сырықтың көлденең қиманың тербеліс жазқтығына перпендикуляр инерция моменті; μ – материалдың ішкі кедергісін сипаттайтын тұрақты коэффициент.

Зерттеу нәтижелері. Төменнен және жоғарыдан жоғары ретті параболалармен шектелген теңселмелі тірекке орнатылған, шоғырланған жүктемелері бар сырық қозғалысының дифференциалдық теңдеуін релаксацияланатын жер қабатындағы дөңгелеу үйкелісін ескере отырып қорытып шығарайық.

Шоғырланған жүктемелері бар сырықтың әрбір нүктелерінің, қозғалмайтын координаталар жүйелеріне қатысты горизонталь ығысуын $u(z, t)$ арқылы, ал жоғарғы табанмен байланысқан қозғалмалы координаттар жүйесіне қатысты $u_1(z, t)$ арқылы белгілейік. Сонда келесі қатынас орындалады

$$u(z, t) = x(t) + u_1(z, t) \quad (6)$$

Осылайша, теңселмелі тірекке орнатылған, шоғырланған жүктемелері бар серпімді стерженнің қозғалысы, тіпті аз тербеліс жағдайында да, сызықты емес теңдеулер арқылы сипатталады. $n=m$ жағдайын қарастырайық. Сонда теңдеу мына түрде болады

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2}{\partial z^2} \left(EJ \frac{\partial^2 u_1}{\partial z^2} \right) + \mu \frac{\partial^2}{\partial z^2} \left(EJ \frac{\partial^3 u_1}{\partial t \partial z^2} \right) + [g + \ddot{y}_0(t)] \frac{\partial}{\partial z} \left(m(z) \frac{\partial u_1}{\partial z} \right) + m(z) \frac{\partial^2 u_1}{\partial t^2} = -m(z) \ddot{x}(t); \\ \ddot{x} + (1-\alpha) \frac{\varepsilon \omega_0^2 N_n}{n-1} \frac{\dot{x} - \dot{x}_0}{(x - x_0)^{\frac{n-2}{n-1}}} + (1-\alpha) \left[1 + \frac{\ddot{y}_0(t)}{g} \right] \left[\omega_0^2 N_n (x - x_0)^{\frac{1}{n-1}} - \omega_0^2 (x - x_0) \right] = -\alpha \frac{\partial^2 u_1}{\partial t^2}; \end{aligned} \quad (7)$$

мұнда: $\alpha = \frac{\gamma}{1+2\gamma}$, $\gamma = \frac{m(z) \cdot l}{M}$, M – кинематикалық іргетастың жоғарғы

табанының массасы (3 дене массасы, 2-сурет); g – еркін түсу үдеуі; $m_c(z)$ – сырықтың погонды массасы; m_g , – жүктеменің массасы

$$m(z) = m_c(z) + m_g, \quad \omega_0^2 = \frac{g}{H} \quad (8)$$

(7) сызықты емес теңдеу, релаксацияланатын жер қабатындағы дөңгелеу үйкелісін ескеретін жағдайдағы, жоғары ретті параболалармен шектелген теңселмелі тіректерге орналасқан шоғырланған жүктемелері бар серпімді сырықтың қозғалысын сипаттайды.

Кинематикалық іргетастың төменгі табанының гармоникалық вертикаль жылжу кезіндегі, көлденең қимасы тұрақты, шоғырланған жүктемелері бар біртекті серпімді сырықтың тербелістерін қарастырайық.

$$x_0(t) = 0, y_0(t) = B \sin 2pt \quad (9)$$

$M \gg ml, m = const, EJ = const$ болсын деп ұйғарым жасап және (9) өрнекті, (7) қозғалыс теңдеуіне қойып, айнымалы коэффициентті, сызықты емес дифференциальдық теңдеулер жүйесін аламыз

$$\frac{\partial^2}{\partial z^2} \left(EJ \frac{\partial^2 u_1}{\partial z^2} \right) + \mu \frac{\partial^2}{\partial z^2} \left(EJ \frac{\partial^3 u_1}{\partial t \partial z^2} \right) + [g - 4p^2 B \sin 2pt] \frac{\partial}{\partial z} \left(m(z) \frac{\partial u_1}{\partial z} \right) + m(z) \frac{\partial^2 u_1}{\partial t^2} = -m(z) \ddot{x}(t); \quad (10)$$

$$\ddot{x} + (1-\alpha) \frac{\varepsilon \omega_0^2 N_n}{n-1} \frac{\dot{x} - \dot{x}_0}{(x-x_0)^{\frac{n-2}{n-1}}} + (1-\alpha) [1 - 4\lambda_0 p^2 \sin 2pt] \left[\omega_0^2 N_n (x-x_0)^{\frac{1}{n-1}} - \omega_0^2 (x-x_0) \right] = -\alpha \frac{\partial^2 u_1}{\partial t^2};$$

мұндағы: $\lambda_0 = \frac{B}{g}$.

Шоғырланған жүктемелері бар серпімді сырықтың параметрлік тербелістерінің формасы меншікті иілу тербелістерінің формасымен сәйкес келетін қарапайым жағдайды қарастырумен шектелік.

(10) теңдеулер жүйесінің бірінші теңдеудің шешімін бас координаталар әдісін қолданып мынадай түрде іздейміз

$$u_1(z, t) = \sum_{j=1}^{\infty} \varphi_j(z) q_j(t) \quad (11)$$

мұндағы: $\varphi_j(z)$ мына теңдеуді $EJ \frac{\partial^4 \varphi_j}{\partial z^4} - m \omega_j^2 \varphi_j = 0$ қанағаттандырады, ($j = 1, 2, \dots, \nu$). Шекаралық шарттар мынадай қатыстар арқылы өрнектеледі

$$\begin{aligned} \varphi_j(0) = \varphi_j'(0) = 0, \\ EJ \varphi_j'''(l) = -m_g \omega_j^2 \varphi_j(l), \varphi_j''(l) = 0 \end{aligned} \quad (12)$$

$\omega_j = \frac{\beta_j}{l} \sqrt{\frac{EJ \beta_j}{ml}}$ - шоғырланған жүгі бар серпімді сырықтың меншікті жиелігі; β_j - жиелік теңдеуінің түбірі. Жиелік теңдеуі мынадай түрде болады

$$\beta - \frac{2(1 + ch\beta \cdot \cos \beta)}{ch\beta \sin \beta - sh\beta \cos \beta} = 0 \quad (13)$$

Жиелік теңдеуінің бірінші төрт түбірі мынадай мәндерге ие болады: $\beta_j = 1.875; 4.094; 7.855; 10.996$. $\varphi_j(z)$ фундаментальды функциялардың мәндерін төмендегі формулалар арқылы анықтаймыз $\varphi_j(z)$:

$$\varphi_j(z) = (sh(k_j l) + \sin(k_j l))(ch(k_j z) - \cos(k_j z)) - (ch(k_j l) + \cos(k_j l))(sh(k_j z) - \sin(k_j z)) \quad (14)$$

(11)-ды (10)-ға қойып, нәтижесін $\varphi_j(z)dz$ көбейтіп және оны 0-ден l -ге дейін интегралдап, біз $q_j(t)$ және $x(t)$ негізгі ізделетін бас координаталарға қатысты тәуелсіз теңдеулердің жиынын аламыз

$$\begin{aligned} \ddot{q}_j &= -\frac{1}{1-\alpha} \mu \omega_j^2 \dot{q}_j - \frac{1}{1-\alpha} \omega_j^2 \left[\left(1 - \frac{mg}{P_{kpi}} \right) + \frac{4mp^2 B}{P_{kpi}} \sin 2pt \right] q_j + E_{0j} \varepsilon \dot{\Phi}(x) + \\ &+ E_{0j} [1 - 4\lambda_0 p^2 \sin 2pt] [\Phi(x) - \omega_0^2 x]; \\ \ddot{x} &= \frac{\alpha}{1-\alpha} \frac{\mu \omega_j^2}{E_{0j}} \dot{q}_j + \frac{\alpha}{1-\alpha} \frac{\omega_j^2}{E_{0j}} \left[\left(1 - \frac{mg}{P_{kpi}} \right) + \frac{4mp^2 B}{P_{kpi}} \sin 2pt \right] q_j - \varepsilon \dot{\Phi}(x) - \\ &- [1 - 4\lambda_0 p^2 \sin 2pt] [\Phi(x) - \omega_0^2 x]; \end{aligned} \quad (15)$$

мұндағы:

$$\begin{aligned} E_{0j} &= \frac{\int_0^l \varphi_j(z) dz}{\int_0^l \varphi_j^2(z) dz}; \quad P_{kpi} = \frac{EJ \int_0^l (\varphi_j''(z))^2 dz}{\int_0^l (\varphi_j'(z))^2 dz}; \quad \omega_j = \frac{\kappa_j^2}{l^2} \sqrt{\frac{EJ}{m}}, \\ \Phi(x) &= \omega_0^2 N_n(x)^{\frac{1}{n-1}}. \end{aligned}$$

Гармоникалық тербеліс жағдайында, $2\pi/p$ периоды бар негізгі жиіліктің құраушысын периодтық шешімнің жоғары гармоникасынан басым және (15) теңдеулер жүйесінің сызықты емес мүшесін жуықтап мынадай түрде өрнектеуге болады деп ұйғарым жасаймыз

$$q_j = a_j \sin pt + b_j \cos pt; \quad x = a \sin pt + b \cos pt; \quad \Phi(x) = C \sin pt + D \cos pt \quad (16)$$

мұнда: сызықты емес мүшенің коэффициенттері коллокация әдісімен анықталады [1] және мынадай түрге ие болады

$$C = \omega_0^2 N_n K_1 \frac{a}{[a^2 + b^2]^{\frac{n-2}{2(n-1)}}}; \quad D = \omega_0^2 N_n K_1 \frac{b}{[a^2 + b^2]^{\frac{n-2}{2(n-1)}}}; \quad K_1 = \frac{1}{3} \left[\frac{1}{2^{n-1}} + \sqrt{3} \left(\frac{\sqrt{3}}{2} \right)^{\frac{1}{n-1}} + 1 \right] \quad (17)$$

a_j, b_j және a, b амплитудасы уақыттың функциясы деп, ал t байланысты баяу өзгертеді деп ұйғарым жасаймыз.

(16)-ны (15)-формулаға қойып, $\sin pt$ және $\cos pt$ бар мүшелердің коэффициенттерін жеке нольге теңестіріп мынаны аламыз

$$\begin{aligned} \dot{a}_j &= \frac{1}{p} \left\{ -\frac{1}{1-\alpha} \omega_j^2 \left(\mu p + \frac{2mp^2 B}{P_{kpi}} \right) a_j + \left[p^2 - \frac{1}{1-\alpha} \omega_j^2 \left(1 - \frac{mg}{P_{kpi}} \right) \right] b_j + \right. \\ &+ E_{0j} [\varepsilon p W - 2\lambda_0 p^2 (W - \omega_0^2)] a + E_{0j} (W - \omega_0^2) b \left. \right\}; \\ \dot{b}_j &= -\frac{1}{p} \left\{ \left[p^2 - \frac{1}{1-\alpha} \omega_j^2 \left(1 - \frac{mg}{P_{kpi}} \right) \right] a_j + \frac{1}{1-\alpha} \omega_j^2 \left(\mu p - \frac{2mp^2 B}{P_{kpi}} \right) b_j - \right. \\ &- E_{0j} [\varepsilon p W + 2\lambda_0 p^2 (W - \omega_0^2)] b + E_{0j} (W - \omega_0^2) a \left. \right\} \end{aligned}$$

$$\dot{a} = \frac{1}{p} \left\{ \frac{\alpha}{1-\alpha} \frac{\omega_j^2}{E_{0j}} \left(\mu p + \frac{2mp^2 B}{P_{kpi}} \right) a_j + \frac{\alpha}{1-\alpha} \frac{\omega_j^2}{E_{0j}} \left(1 - \frac{mg}{P_{kpi}} \right) b_j - \left[\varepsilon p W - 2\lambda_0 p^2 (W - \omega_0^2) \right] a + \left[p^2 - (W - \omega_0^2) \right] b \right\}; \quad (18)$$

$$\dot{b} = -\frac{1}{p} \left\{ \frac{\alpha}{1-\alpha} \frac{\omega_j^2}{E_{0j}} \left(1 - \frac{mg}{P_{kpi}} \right) a_j - \frac{\alpha}{1-\alpha} \frac{\omega_j^2}{E_{0j}} \left(\mu p - \frac{2mp^2 B}{P_{kpi}} \right) b_j + \left[p^2 - (W - \omega_0^2) \right] a + \left[\varepsilon p W - 2\lambda_0 p^2 (W - \omega_0^2) \right] b \right\};$$

Біздің ары қарайғы зерттеу кезеңінде, өтпелі және тұрақты күйлерді зерттеуде (18) теңдеу маңызды рөл атқарады. Алдымен мынадай қойылым арқылы амплитудалары тұрақты болатын орныққан күйді қарастырайық:

$$a_j = A_j \sin \beta, \quad b_j = A_j \cos \beta; \quad a = A \cos \beta, \quad b = A \sin \beta, \quad A_j = \chi_j A$$

(18) теңдеулер жүйесін $\gamma \approx 0$, $\alpha \approx 0$ шарттары арқылы мынадай түрге келтіруге болады

$$\left[(p^2 - \Omega_j^2) \chi_j - 2E_{0j} \lambda_0 p^2 \omega^2 \right] A^2 + \nu_j^2 \chi_j^2 A^2 = E_{0j}^2 \varepsilon^2 p^2 (\omega^2 + \omega_0^2) A^2 + (E_{0j} \omega^2 + F_j \chi_j)^2 A^2; \quad (19)$$

$$4\lambda_0^2 p^4 \omega^4 A^2 = (\omega^2 - p^2)^2 A^2 + \varepsilon^2 p^2 (\omega^2 + \omega_0^2)^2 A^2; \quad (20)$$

$$tg \beta = (\omega^2 - p^2) \chi_j / 2\lambda_0 p^2 \omega^2 + \varepsilon p (\omega^2 + \omega_0^2); \quad (21)$$

мұндағы:

$$A = \sqrt{a^2 + b^2}, \quad W = \omega_0^2 N_n K_l / A^{\frac{n-2}{n-1}}, \quad \omega^2 = W - \omega_0^2, \quad (22)$$

$$\Omega_0^2 = \omega_j^2 \left(1 - \frac{mg}{P_{kpi}} \right), \quad \nu_j = \mu p \omega_j^2, \quad F_j = \frac{2mp^2 B \omega_j^2}{P_{kpi}}.$$

(19) және (20) теңдеулердің шешімдерінің біреуі тривиальді болады, яғни $A = 0$, тривиальді емес шешім төмендегі теңдеулер жүйесінен алынады

$$\left[(p^2 - \Omega_j^2)^2 + \nu_j^2 - F_j^2 \right] \chi_j^2 - 4 \left[(p^2 - \Omega_j^2) E_{0j} \lambda_0 p^2 \omega^2 + \frac{1}{2} E_{0j} F_j \omega^2 \right] \chi_j + E_{0j}^2 \left[4\lambda_0^2 p^4 \omega^4 - \varepsilon^2 p^2 (\omega^2 + \omega_0^2)^2 - \omega^4 \right] = 0; \quad (23)$$

$$(\omega^2 - p^2)^2 + \varepsilon^2 p^2 (\omega^2 + \omega_0^2)^2 - 4\lambda_0^2 p^4 \omega^4 = 0. \quad (24)$$

$\omega^2 \gg \omega_0^2$ ұйғарым жасайық. Квадраттық теңдеудің шешімі мынадай түрде болады

$$\chi_{j\pm} = G_{j\pm} \omega^2 \quad (25)$$

$$G_{j\pm} = \frac{2E_{0j} \left[(p^2 - \Omega_j^2) \lambda_0 p^2 + F_j \right]}{(p^2 - \Omega_j^2)^2 + \nu_j^2 - F_j^2} \pm$$

мұндағы:

$$\pm \sqrt{4 \left\{ \frac{\left[(p^2 - \Omega_j^2) \lambda_0 p^2 + F_j \right] E_{0j}}{(p^2 - \Omega_j^2)^2 + \nu_j^2 - F_j^2} \right\}^2 + \frac{E_{0j}^2 \left[1 + \varepsilon^2 p^2 - 4\lambda_0^2 p^2 \right]}{(p^2 - \Omega_j^2)^2 + \nu_j^2 - F_j^2}}$$

(25) ескеріп, (24) мынадай түрге түрлендіреміз

$$\omega^4 - \frac{2p^2[1 - \varepsilon^2 \omega_0^2]}{\sigma_{j\pm}} \omega^2 + \frac{p^2(p^2 + \varepsilon^2 \omega_0^4)}{\sigma_{j\pm}} = 0. \quad (26)$$

мұндағы: $\sigma_{j\pm} = 1 + \varepsilon^2 p^2 - 4\lambda_0^2 p^4$;

(26) биквадраттық теңдеуді шешіп және (22) өрнекті ескеріп A тривиальді емес шешімді анықтаймыз

$$A = \left\{ \frac{\omega_0^2 N_n K_1 \sigma_{j\pm}}{\omega_0^2 \sigma_{j\pm} + p^2(1 - \varepsilon^2 \omega_0^2) \pm \sqrt{(1 - \varepsilon^2 \omega_0^2)^2 p^4 - p^2 \sigma_{j\pm} (p^2 + \varepsilon^2 \omega_0^4)}} \right\}^{\frac{n-1}{n-2}}; \quad (27)$$

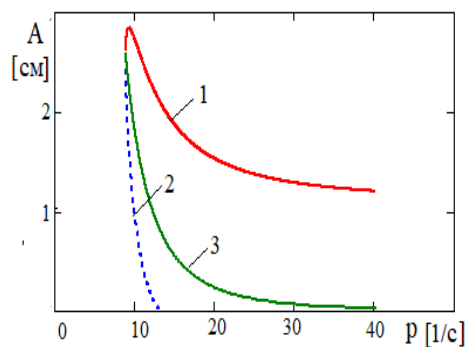
ал β фаза ығысу бұрышы төмендегі теңдеумен анықталады.

$$\operatorname{tg} \beta = \frac{p^2 A^{\frac{n-1}{n-2}}}{\omega_0^2 N_n K_1 (2\lambda_0 p^2 + \varepsilon p)}; \quad (28)$$

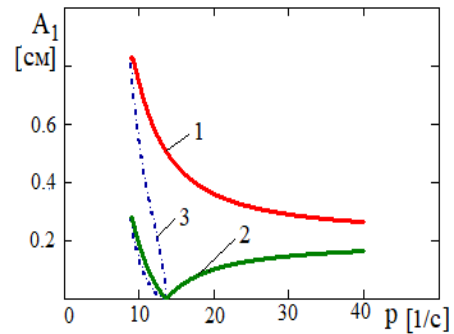
Ғылыми нәтижелерді талқылау. (18) теңдеулер жүйесінен шығатыны, нөлдік бастапқы шарттарда, t аз болғанда, амплитудасы нөлге тең; егер жүйе бастапқыда тепе-теңдікте болса, ол алдағы уақытта да тепе-теңдікте қалады.

Нөлге тең емес алғышарттарда жүйе тербелмелі қозғалыс жасайды. A , A_1 және β жүйе параметрлерінің қоздыру жиелігіне тәуелділігі (A – табан амплитудасы және шоғырланған жүгі бар серпімді сырықтың бірінші тонына сәйкес келетін амплитудасы), параметрлердің келесі мәндері үшін 3-ші және 4-суреттерде көрсетілген.

$$n = 4, a_1 = 6,25 \cdot 10^{-8} \text{ см}^{-3}, a_2 = 1,421 \cdot 10^{-7} \text{ см}^{-3}, H = 300 \text{ см}, l = 50 \cdot 10^2 \text{ см}, \varepsilon = 0,06 \text{ с}, EJ = 0,5 \cdot 10^{14}, m = 7 \cdot 10^3 \text{ кг}, \mu = 0,001, \lambda_0 = 0,0035, B = 3,43, \omega_1 = 0,012$$



Сурет 3. A амплитудасының p қозу жиілігіне тәуелділігі



Сурет 4. A_1 амплитудасының p қозу жиілігіне тәуелділігі

3-ші және 4-суреттердегі резонанстық қисықтарда, 3-суреттің 1-сызығы, ал 4-суреттің 1-ші және 2-сызықтары тепе-теңдіктің орнықты күйіне сәйкес келеді, 3-суреттің 2-сызығы, 4-суреттің 3-сызығы орнықсыз шешімге сәйкес келеді.

3-суретте (22) формуламен тұрғызылған скелетті қисықта көрсетілген (3-сызық). Резонанстық қисықтың абцисса осімен қиылысу нүктесі (27) теңдеуден $A = 0$ шарты бойынша анықталады, яғни теректік нүкте мынадай түрде болады

$$P_r = \frac{\sqrt{2}\delta_j}{4\lambda_0} \sqrt{1 + \sqrt{1 + 16\frac{\lambda_0^2}{\delta_j^4}}}; \quad (29)$$

мұндағы:

$$\delta_j^2 = \varepsilon^2 - \frac{4\Omega_j^2 G_{j\pm}}{E_{0j}} \lambda_0, \quad \gamma_j = 1 - 2\frac{F_j G_{j\pm}}{E_{0j}} + \frac{F_j^2 G_{j\pm}^2}{E_{0j}^2} - \frac{v_j^2 G_{j\pm}^2}{E_{0j}^2} - \frac{\Omega_j^4 G_{j\pm}^2}{E_{0j}^2}.$$

Теңселмелі тірекке орнатылған дірілден қорғалатын дене амплитудасы мәжбүр тербелістің жиілігі шексізге ұмтылғанда ($p \rightarrow \infty$) мынадай мәндермен шектеледі

$$A = \left\{ \frac{2\omega_0^2 \lambda_0 N_n K_1}{1 - 2\omega_0^2 \lambda_0} \right\}^{\frac{n-1}{n-2}}$$

Егер де мынадай шекті шарт орындалса амплитуданың мәндері нақты болады

$$\lambda_0 < \frac{1}{2\omega_0^2}.$$

(10) теңдеу, Матье типті дифференциалдық теңдеуге жатады. Бұл теңдеудің теориясына сәйкес, егер төмендегі шарт орындалса, қозғалыс орнықты саналады

$$\frac{p^2}{g} \leq \frac{1}{4B}. \quad (30)$$

(30) шарт орындалады деп есептейміз. Мысалы, жер сілкінгенде, сейсмикалық әсердің вертикаль құраушысының үдеуі шамасы бойынша ауырлық күші үдеуінен аспайды.

Қорытынды. Шоғырланған жүктемелер бар серпімді сырықтар мен кинематикалық дірілді оқшаулаушы қондырғыдан тұратын жүйенің қозғалысын зерттеу әдісі әзірленді. Ол мынадан тұрады: голономдық байланыстардың жаңа жиынтығын енгізу, сондай-ақ кинематикалық тіректердегі шоғырланған жүктемелері бар серпімді сырықтың қозғалысын сипаттайтын жаңа математикалық модельдерді жасау. Вертикаль гармоникалық қоздырулар кезінде, түзетілген беттері бар теңселмелі тірекке орнатылған шоғырланған жүктемелері бар серпімді сырық дірілінің табиғи режимдері анықталады. Негізгі элементтері жоғары ретті айналу беттерімен шектелген теңселмелі тірек болып табылатын кинематикалық дірілді оқшаулау қондырғысына орнатылған шоғырланған жүктемелері бар серпімді сырықтардың негізгі диамикалық қасиеттері нақтыланды. Оларға кинематикалық тіректердің тиісті өлшемдерін және шоғырланған жүктемелері

бар серпімді сырықтардың динамикалық параметрлерін тағайындау арқылы дірілді оқшаулау жүйесін кез келген жиілікке мақсатты түрде реттеу, дірілден қорғау жүктемесінің қайта таралуының қауіпті әсерін болдырмау, резонансты тербелістерден қашу, кинематикалық оқшаулауы бар серпімді құрылғыға әсер ететін вертикаль қоздырудың әсерін азайту немесе жою жатады.

Әдебиеттер тізімі

1. Bissembayev K., Jomartov A., Tuleshov A., Dikambay T. Analysis of the oscillating motion of a solid body on vibrating bearers // *Machines*. 2019. P. 1-21.
2. Bissembayev K., Omyrzhanova O., Sultanova K. Oscillations specific for the homogeneous rod like elasticstructure on the kinematic absorber basis with rolling bearers having straightened surfaces // *Mechanisms and Machine Science*. 2019. Vol. 68, P. 187-195.
3. Bissembayev K., Omyrzhanova Zh. Friction arising from rolling of a bearing with straightened surfaces on a relaxing ground // *Proceedings of 22nd International Conference "MECHANIKA 2017"*. – Lithuania: Kaunas University of Technology, 2017. P. 52-57.
4. Caruntu D.I. On bending vibrations of some kinds of beams of variable cross-section using orthogonal polynomials // *Revue Roumaine des Sciences Techniques. Serie de Mecanique Appliquee*, 1996. Vol. 41, No. 3-4. P. 265-272.
5. Conway H.D., Dubil J.F. Vibration frequencies of truncated wedge and cone beam // *Journal of Applied Mechanics*. 1965. Vol. 32, No. 4. P. 932-935.
6. Storti D., Aboelnaga Y. Bending vibrations of a class of rotating beams with hypergeometric solutions // *Journal of Applied Mechanics*, 1987. Vol. 54, P. 311-314.
7. Naguleswaran S. Vibration in the two principal planes of a nonuniform beam of rectangular cross-section, one side of which varies as the square root of the axial coordinate // *Journal of Sound and Vibration*, 1994. Vol. 172, No. 3. P. 305-319.
8. Abrate S. Vibration of non-uniform rods and beams // *Journal of Sound and Vibration*, 1995. Vol. 185, No. 4. P. 703-716.
9. Krynicki E., Mazurkiewicz Z. Free vibration of a simply supported bar with linearly variable height of cross section // *Journal of Applied Mechanics*, 1962. Vol. 29E, P. 497-501.
10. Sato K. Transverse vibrations of linearly tapered beams with ends restrained elastically against rotation subjected to axial force // *International Journal of Mechanical Sciences*, 1980. Vol. 22, P. 109-115.
11. Rao J.S. The fundamental flexural vibration of a cantilever beam of rectangular cross section with uniform taper // *The Aeronautical Quarterly*, 1965. Vol. 16, No.2. P. 139-144.
12. Carnegie W., Thomas J. Natural frequencies of long tapered cantilevers // *The Aeronautical Quarterly*, 1967. Vol. 18, P. 309-320.
13. Wang Q. Sturm-Liouville equation for free vibration of a tube-in-tube tall building // *Journal of Sound and Vibration*, 1996. Vol. 191, No. 3. P. 349-355.

Материал редакцияға 29.03.24 түсті.

К. Бисембаев¹, С.М. Тезекеев², А. Байчапанова²

¹Институт механики и машиноведения им. акад. У.А. Дзолдасбекова,
г. Алматы, Казахстан

²Казахский Национальный Педагогический Университет им. Абая,
г. Алматы, Казахстан

ИССЛЕДОВАНИЕ ПАРАМЕТРИЧЕСКИХ КОЛЕБАНИЙ УПРУГОГО СТЕРЖНЯ С СОСРЕДОТОЧЕННЫМ ГРУЗОМ НА ВИБРООПОРАХ

Аннотация. В работе исследуется параметрическая вибрация упругого стержня с сосредоточенными нагрузками, установленного на виброопорах, ограниченными спрямляемыми поверхностями, с учетом трения качения в релаксирующем грунте. Получено уравнение движения системы. Исследован установившийся режим колебательного процесса системы и определен критерий устойчивости. Уточнены основные динамические свойства упругих стержней с сосредоточенными нагрузками, закрепленных на кинематическом виброизолирующем узле, основными элементами которого являются колеблющиеся опоры, ограниченные поверхностями вращения высокого порядка. Задав соответствующие размеры кинематических опор и динамические параметры упругих стержней с сосредоточенными нагрузками, можно целенаправленно настроить систему виброизоляции практически на любую частоту, избежать опасного эффекта перераспределения нагрузки виброзащиты, исключить резонансные вибрации, снизить воздействие вертикального возбуждения на упругое устройство с кинематической изоляцией или удалением.

Ключевые слова: виброзащита, виброопора, собственная форма, упругий стержень с сосредоточенной нагрузкой, параметрические колебания.

К. Bisembaev¹, S.M. Tezekeyev², A. Baichapanov²

¹Academician U.A. Dzholdasbekov Institute of Mechanics and Machine Science,
Almaty, Kazakhstan

²Abai Kazakh National Pedagogical University Almaty, Kazakhstan

INVESTIGATION OF PARAMETRIC OSCILLATIONS OF AN ELASTIC ROD WITH A CONCENTRATED LOAD ON VIBRATION SUPPORTS

Abstract. In this paper, we study the parametric vibration of an elastic rod with concentrated loads mounted on vibration supports limited by straightened surfaces, taking into account rolling friction in a relaxing ground. The equation of motion of the system is obtained. The steady-state mode of the oscillatory process of the system is investigated and the stability criterion is determined. The basic dynamic properties of elastic rods with concentrated loads fixed on a kinematic vibration-insulating unit, the main elements of which are oscillating supports limited by high-order rotation surfaces, are clarified. By setting the appropriate dimensions of kinematic supports and dynamic parameters of elastic rods with concentrated loads, it is possible to purposefully adjust the vibration isolation system to almost any frequency, avoid the dangerous effect of redistributing the vibration protection load, avoid resonant vibrations, reduce the impact of vertical excitation on an elastic device with kinematic isolation or removal.

Keywords: vibration protection, vibration support, proper shape, elastic rod with concentrated load, parametric oscillations.