ҒТАМР 27.41.17

Н.А. Абиев[1] – *негізгі автор,*
М.Т. Иманбекова[2]

[1]Физ.-мат. ғылым. канд., доцент, [2] Магистрант
ORCID [1]*https://orcid.org/0000-0003-1231-9396*
М.Х. Дулати атындағы Тараз өңірлік университеті
Тараз қ., Қазақстан Республикасы
@ [1]*abievn@mail.ru*

https://doi.org/10.55956/QOOK1038

ОРНЫҚСЫЗДЫҚ ҚҰБЫЛЫСЫНЫҢ АНАЛИТИКАЛЫҚ ЕСЕПТЕУ ЖҮЙЕЛЕРІНДЕГІ ИНТЕРПРЕТАЦИЯЛАНУЫ

Аңдатпа. Мақалада қисынсыз қойылған есептер теориясының маңызды ұғымдардың бірі болатын орнықсыздық ұғымын қарастырамыз. Матрицалық операторлар жағдайы үшін орнықсыздықтың компьютерлік интерпретациялануы келтіріледі. Матрицаның шартталу саны деп аталатын маңызды мінездеменің мағынасы Maple аналитикалық есептеу жүйесі көмегімен ашып көрсетіледі. Мысал ретінде осындай сан нашар шартталынған Гильберт матрицалары үшін есептелінген. Барлық алгоритмдер программа түрінде іске асырылып, нәтижелер графиктерде бейнеленген.

Тірек сөздер: қисынсыз есеп, ауытқу, орнықсыздық, матрицаның шартталу саны, Гильберт матрицалары.

Абиев, Н.А. Орнықсыздық құбылысының аналитикалық есептеу жүйелеріндегі интерпретациялануы [Мәтін] / Н.А. Абиев, М.Т. Иманбекова // Механика және технологиялар / Ғылыми журнал. – 2021. – №4(74). – Б. 90-101. https://doi.org/10.55956/QOOK1038

Кіріспе. Жалпы түрдегі операторлық $Au = f$ есебін қарастырайық, мұндағы U, F - нормаланған сызықтық кеңістіктер, ал $A: U \to F$ осы сызықтық кеңістіктерді бірі-біріне бейнелейтін белгілі сызықтық оператор болсын. f арқылы F кеңістігінің белгілі функциясын, ал u арқылы U кеңістігінің белгісіз функциясын, яғни есептің шешімін белгілейік.

Анықтама 1. Келесі шарттар орындалған жағдайда $Au = f$ есебі (Адамар бойынша) қисынды қойылған есеп деп аталады:

1) есептің шешімі бар,
2) сол шешім жалғыз,
3) сол шешім бастапқы деректерден (теңдеудің оң жағы, бастапқы-шекаралық шарттар) үзіліссіз түрде тәуелді.

Соңғы 3-қасиет *орнықтылық* деп те аталады. Оңайлатып айтқанда, орнықтылық f шамасының азғантай өзгеруі u шешімінің де көп емес өзгеруіне әкелетінін білдіреді. Математикалық физика теңдеулері теориясының толқын, жылу өткізгіштік, Лаплас теңдеуі сияқты классикалық есептері қисынды екенін айта кетейік. Жак Адамар көрсеткендей, Лаплас теңдеуі үшін қойылған Коши есебі қисынсыз есептің алғашқы мысалы болып табылады [2]. Сонымен қатар, Фредгольм мен Вольтерраның бірінші текті интегралдық теңдеулері де қисынсыз қойылған есептердің класына жатады. Кері есептердің дерлік барлығы қисынсыз. Қисынсыз қойылған есептерді шешу әдістерінің арасынан А.Н.Тихонов (Москва ғылыми мектебі) пен М.М.Лаврентьевтің (Новосибирск ғылыми мектебі) регуляризациялау әдістері ерекшеленеді. Жалпысынан, есептердің орнықтылық қасиеттерін анықтау күрделі әрі маңызды есептердің қатарына жататынын айта кетейік.

Зерттеу әдістемесі. Қарастырылып жатқан тақырыпты тереңірек ашып көрсету мақсатында теориядан белгілі болған анықтамаларға тоқтала кетейік.

Айталық, әрбір f бойынша

$$Au = f \tag{1}$$

есебінің бірден-бір u шешімі табылсын.

Теңдеудің оң жағы δf ауытқуына ұшырап, $f+\delta f$ мәнін қабылдасын дейік. Осыны былайша белгілейік $\tilde{f} := f + \delta f$.

Байқап тұрғандай, өзгеріске ұшыраған $\tilde{f}$ оң жағына енді (1) теңдеуінің басқа шешімі сәйкес келетін болады, айталық, ол $\tilde{u}$ болсын. Басқаша айтқанда,

$$A\tilde{u} = \tilde{f} \tag{2}$$

теңдігі орындалады.

Сонда орнықтылық $\delta f = \tilde{f} - f$ шамасы F кеңістігі нормасында нөлге ұмтылғанда, $\delta u := \tilde{u} - u$ шамасы да ((1) және (2) есептерінің шешімдерінің айырымы) U кеңістігі нормасында нөлге ұмтылуынан хабар береді:

$$\left\|\tilde{f} - f\right\|_F \to 0 \qquad \text{болғанда} \quad \left\|\tilde{u} - u\right\|_U \to 0.$$

Демек, (1) теңдеуінің оң жағының δf аз ауытқуы (1) теңдеуінің шешімінің δu аз ауытқуын туындатады. Орнықтылық қасиеті A операторы мен A^{-1} кері операторының

$$\|A\| = \sup_{u \neq 0} \frac{\|Au\|_F}{\|u\|_U}, \qquad \left\|A^{-1}\right\| = \sup_{f \neq 0} \frac{\left\|A^{-1} f\right\|}{\|f\|_F}$$

нормаларына да байланысты болатынын алдын ала айта кетейік.

Мысал. Қисынсыз есептің қарапайым мысалы ретінде мектеп курсындағы

$$10^{-6} x = 10^{-6} \tag{3}$$

теңдеуін алуға болады. Мұның тура шешімі $x = 1$ екені түсінікті.

Енді (3) теңдеуінің оң жағына дерлік нөлге жуық $\varepsilon = 10^{-4}$ ауытқуын беріп көрейік.

Сонда (2) теңдеуінің аналогы болатын $10^{-6}x = 10^{-6} + \varepsilon$ теңдеуі алынады. Оның шешімі $\tilde{x} = 1 + 10^2 = 101$.

Осы қарапайым мысалдан-ақ көрініп тұрғандай, есеп қисынсыз екені айқын- оң жағының 10^{-4} ке тең шектеусіз аз ауытқуы шешімнің $\tilde{x} - x = 100$ үлкен секірісіне әкеліп соқты.

Сонымен, қисынсыз есептер есептеу математикасы үшін ”өте ыңғайсыз“ проблемаларды жаратады. Практика жүзінде ауытқулар сөзсіз түрде кездеседі – олар математикалық моделдің қателерінен, болмаса компьютерлік дөңгелектеудің өзінен-ақ пайда болады. Осындай жағдайларда $x = 1$ тура шешімінің орнына фантастикалық $x = 101$ шешімін алып қалуымыз толық ықтимал.

Алынған нәтижелер. Теориялық жобаларды компьютерде интерпретациялау үшін мынадай сызықтық теңдеулер жүйесін қарастырдық:

$$(a+1)x_1 + x_2 = 1, \qquad x_1 = x_2 = 1. \tag{4}$$

Мұның шешімі параметрінен тәуелсіз: $x_1 = 0, x_2 = 1$.

Енді оң жағына $\varepsilon = 10^{-6}$ аз ауытқуын беріп көрейік:

$$(a+1)x_1 + x_2 = 1 + \varepsilon, \qquad x_1 + x_2 = 1.$$

Сонда ауытқуға ұшыраған жүйенің шешімі:

$$\tilde{x}_1 = \varepsilon a^{-1}, \qquad \tilde{x}_2 = 1 - \varepsilon a^{-1}.$$

Анығырақ болсын үшін (4) жүйесінде $a = 10^{-8}$ деп ұйғарайық. Сонда ауытқыған жүйе бастапқы (4) жүйесінің $x_1 = 0, x_2 = 1$ шешіміне мүлдем жақындамайтын $\tilde{x}_1 = 100,\ \tilde{x}_2 = -99$ шешіміне ие болады.

Жалпы түрдегі $Ax = b$ сызықтық теңдеулер жүйесін қарастырайық, мұндағы A- өлшемі $n \times n$ болған нақты матрица, x, b - өлшемдері $n \times 1$ болған вектор-бағаналар.

Сонда (1) есебі тұрғысынан қарайтын болсақ, алдымызда $A : x \mapsto b$ ережесімен берілетін $A : R^n \to R^n$ операторлық теңдеуі тұрған болады.

R^n векторлық кеңістігіне норма енгізейік. Айталық, үшінші норма деп аталушы $\|x\|_\infty := \max_{1 \le i \le n} |x_i|$ нормасы таңдалынып алынған болсын.

Бұған сәйкес келетін $\|A\|_\infty = \sup_{x \ne 0} \dfrac{\|Ax\|_\infty}{\|x\|_\infty}$ операторлық (матрицалық) нормасы мынаған тең болатыны белгілі ([1]):

$$\|A\|_\infty := \max_{1 \le i \le n} \sum_{k=1}^{n} |a_{ik}|. \tag{5}$$

Ескерту 1. Ақырлы өлшемді сызықтық кеңістіктерде кез келген екі норма өзара эквивалентті болғандықтан ([3] жұмысын қараңыз), осыдан ары қарай айтылатын қорытындылар барлық нормаларға қатысты болады. Сол себептен, ∞ төменгі индексінжазбайтын боламыз. Норманың нақты өрнектелуі бізді тек есептеулер кезінде ғана қызықтыратын болады.

Анықтама 2. A ерекше емес матрицасының шартталу саны (число обусловленности) деп мына санды айтады $[4]$:

$$cond(A) = \|A\| \cdot \|A^{-1}\|.$$

Осы сан неғұрлым үлкен болған сайын, есеп соғұрлым орнықсыз.

Расында да $Ax = b$ жүйесінің оң жағы δb аз ауытқуына ұшырасын дейік. Осылайша ауытқыған $\tilde{b} = b + \delta b$ оң жағына сәйкес келетін шешім $\tilde{x}$ болсын, яғни

$$A\tilde{x} = \tilde{b}$$

Шешімдердің $\tilde{x} - x$ айырымын δx арқылы белгілеп, $\frac{\|\delta x\|}{\|x\|}$ салыстырмалы қателігінің шамасын іздеп көрейік.

Оператордың (матрицаның) сызықтылық қасиетіне сай $A \cdot \delta x = \delta b$ теңдігі орын алады. Осыдан алынатын $\delta x = A^{-1} \cdot \delta b$ теңдігінен норма қасиетіне сай

$$\|\delta x\| \le \|A^{-1}\| \cdot \|\delta b\|$$

бағасы келіп шығады. Тура осылайша жолмен $\|b\| \le \|A\| \cdot \|x\|$.

Бұларды өзара бірі-біріне көбейтіп, алатынымыз:

$$\|\delta x\| \cdot \|b\| \le \|A^{-1}\| \cdot \|\delta b\| \cdot \|A\| \cdot \|x\|.$$

Осыдан

$$\frac{\|\delta x\|}{\|x\|} \le cond(A) \cdot \frac{\|\delta b\|}{\|b\|}. \qquad (6)$$

Демек, $cond(A)$ санының үлкен мәндерінде тіпті оң жағының $\frac{\|\delta b\|}{\|b\|}$ салыстырмалы қателігі шектеусіз аз шама болғанда да, шешімнің $\frac{\|\delta x\|}{x}$ салыстырмалы қателігі үлкен сан болып қалуы мүмкін екені келіп шығады.

(4) жүйесінің орнықсыздығын түсіндіру. Мұндағы жүйені матрицалық түрде өрнектеп, жүйенің матрицасын A деп белгілейік:

$$A = \begin{pmatrix} a+1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

(5) формуласы бойынша A нормасын табатын болсақ:

$$\|A\| = \max\{|a_{11}| + |a_{12}| \cdot |a_{21}| + |a_{22}|\} = \max\{a+2, 2\} = a+2.$$

Сондай-ақ, $A^{-1} = a^{-1}\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1+a \end{pmatrix}$ кері матрицасының нормасы

$$\|A^{-1}\| = a^{-1}\max\{2, a+2\} = \frac{a+2}{a}.$$

Бұдан А-ның шартталу саны

$$cond(A) = \|A\| \cdot \|A^{-1}\| = \frac{(a+2)^2}{a} = a + 4 + \frac{4}{a}. \qquad (7)$$

Соңғы өрнек $a \to 0$ кезінде $\frac{4}{a}$ шамасына эквивалентті екені айқын.

Демек, $a = 10^{-8}$ мәнінде A матрицасының шартталу саны үлкен болады, анығырақ айтқанда ол $4 \cdot 10^8$ санына шамалас болады:

$$\lim_{a \to 0} cond(A) = \lim_{a \to 0}\left(a + 4 + \frac{4}{a}\right) = +\infty.$$

(4) жүйесінің ”жағымсыз“ (орнықсыз) мінезі осылайша түсіндіріледі.

Жоғарыда 1-ескертуінде R^n кеңістігінде кез келген екі норма өзара эквивалентті болатыны айтылған еді. Осындай теориялық қорытынды іс жүзінде де расталынады. Атап айтсақ, матрицалық норма ретінде 2-норма деп аталатын $\|x\|_2 = \sqrt{(x, x)}$ векторлық нормасынан туындайтын

$$\|A\|_2 := \sqrt{\max\{\lambda(A^t A)\}} \qquad (8)$$

нормасы қабылданған болсын дейік, мұндағы $\max\{\lambda(A^t A)\}$ саны $A^t A$ матрицасының меншікті мәндерінің ең үлкені, A^t транспонирленген матрица.

A матрицасының шартталу санын (8) нормасында да есептеп көрейік. A - симметриялы және оң матрица, демек, (8) формуласы мынадай түрге келеді: $\|A\| = \max\{\lambda(A)\}$. Сонда A матрицасының меншікті мәндері

$$\lambda_{1,2} = \frac{2 + a \pm \sqrt{a^2 + 4}}{2}$$

болғандықтан, $\|A\| = \lambda_1$. Тура осылайша A^{-1} матрицасының меншікті мәндері

$$\mu_{1,2} = \frac{2 + a \pm \sqrt{a^2 + 4}}{2a}$$

болғандықтан, $\|A^{-1}\| = \mu_1$.

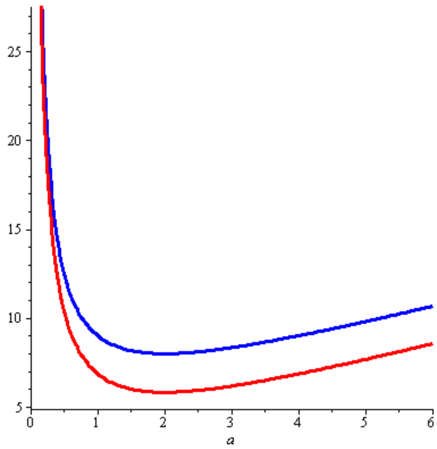
Демек, (8) нормасында

$$cond(A)=\|A\|\cdot\|A^{-1}\|=\frac{\left(2+a+\sqrt{a^2+4}\right)^2}{4a}. \qquad (9)$$

Тейлор қатарына жіктеу арқылы $a\to 0$ кезінде

$$cond(A)=\frac{4}{a}+2+\frac{3a}{4}+0\left(a^2\right),$$

яғни қайтадан $cond(A)\approx\frac{4}{a}$ болатынына көз жеткіземіз. Алынған өрнекті (5) нормасы бойынша табылған (7) өрнегімен салыстыратын болсақ, бұлар $a\to 0$ кезінде эквивалентті екенін байқаймыз (1-сурет). Суретте (7) және (9) өрнектерінің оң жақтарындағы $a+4+4a^{-1}$ және $\left(2+a+\sqrt{a^2+4}\right)^2(4a)^{-1}$ функцияларының графиктері сәйкесінше көк және қызыл түспен бейнеленген.

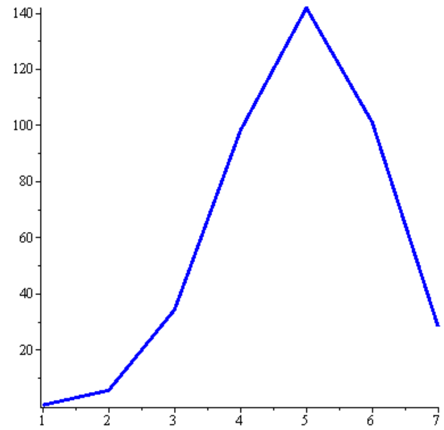


1-сурет. $cond(A)$ санының a параметрінен әртүрлі нормалардағы тәуелділігі: көк түспен (5) нормасында, қызыл түспен (8) нормасында

Нашар шартталынған (орнықсыздыққа себепші болатын) матрицалардың басқа мысалдары болып Гильберт матрицалары саналады. Гильберт матрицасы H деп элементтері

$$h_{ij}=\frac{1}{i+j-1}$$

формуласымен берілетін матрицаны айтады. Өлшемі өскен сайын Гильберт матрицасының шартталу саны да өсіп отырады. Төменде Maple жүйесіндегі есептеулер арқылы 7×7 өлшемді Гильберт матрицасының шартталу саны 10^9 ретіне жететіні көрсетілген және H_7 матрицалы моделдік жүйе шешімінің қателігі бағаланған.



2-сурет. $\|\tilde{x} - x\| / \|x\|$ қателігі

Жоғарыдағы формулаға сай 7×7 өлшемді H_7 Гильберт матрицасы мына түрде болады:

$$H_7 = \begin{pmatrix} 1 & 1/2 & 1/3 & \dots & 1/7 \\ 1/2 & 1/3 & 1/4 & \dots & 1/8 \\ 1/3 & 1/4 & 1/5 & \dots & 1/9 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1/7 & 1/8 & 1/9 & \dots & 1/13 \end{pmatrix}.$$

Осы матрицаны Maple жүйесінде $x = (1,2,3,...,7)^t$ бағанасына көбейтіп, b оң жағын аламыз:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1/2 & 1/3 & \dots & 1/7 \\ 1/2 & 1/3 & 1/4 & \dots & 1/8 \\ 1/3 & 1/4 & 1/5 & \dots & 1/9 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1/7 & 1/8 & 1/9 & \dots & 1/13 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ \vdots \\ 7 \end{pmatrix} = b, \tag{10}$$

мұндағы

$$b = \left(7, \frac{1479}{28}, \frac{5476}{126}, \frac{3119}{84}, \frac{22549}{6930}, \frac{16081}{5544}, \frac{157309}{6006} \right)^t. \tag{11}$$

Сонда осылайша құрылған $H_7 \cdot x = b$ жүйесінің тура шешімі болмақшы. Жүйенің (11) формуласымен берілген оң жағы b шектеусіз аз

$$\varepsilon = (0, \varepsilon_2, \varepsilon_3, \varepsilon_4, 0,0,0)^t$$

ауытқуына ұшыраған болсын дейік:

$$\tilde{b} = \left(7, \frac{1479}{28} + \varepsilon_2, \frac{5471}{126} + \varepsilon_3, \frac{3119}{84} + \varepsilon_4, \frac{22549}{6930}, \frac{16081}{5544}, \frac{157309}{6006}\right)^t, \quad (12)$$

мұндағы $\varepsilon_2 = 10^{-9}, \varepsilon_3 = 10^{-8}, \varepsilon_4 = 10^{-7}$.

Сонда Maple жүйесіндегі есептеулер көрсеткендей, $H_7 \cdot \tilde{x} = \tilde{b}$ жүйесінің шешімі ретінде

$$\tilde{x} = (0.99, 2.1, 1.97, 7.93, -2.09, 12.05, 5.03)^t$$

табылады. Мұның ауытқымаған (10) жүйесінің $x = (1,2,3,...,7)^t$ шешімінен айырмашылығы көк пен жердей екені түсінікті. 2-суретте шешімнің әрбір $i = 1,2,...,7$ компонентасы үшін

$$\left|\frac{\tilde{x}_i - x_i}{x_i}\right|$$

қателіктері пайызбен көрсетілген. 2-суреттен көрініп тұрғандай, $x_5 = 5$ компонентасынан $\tilde{x}_5 = -2.09$ ауытқуының $\left|\frac{\tilde{x}_5 - x_5}{x_5}\right| \cdot 100$ салыстырмалы қателігі ең үлкен ≈ 140 пайызын құрайды. Осындай жағдай да H_7 Гильберт матрицасының нашар шартталуымен түсіндіріледі.

H_7 Гильберт матрицасының нормасын (5) формуласы бойынша есептейтін болсақ, онда мұның $i = 1,2,...,7$ кезіндегі $\sum_{k=1}^{7} |h_{ik}|$ қосындылары жуық шамамен мыналарға тең: $2.6, 1.7, 1.3, 1.1, 0.9, 0.8, 0.7.$

Осылардың ең үлкені 2.6 болғандықтан, норма үшін

$$\|H_7\| = \max_{1 \le i \le 7} \sum_{k=1}^{7} |h_{ik}| = 2.6.$$

H_7^{-1} кері Гильберт матрицасы үшін $\sum_{k=1}^{7} |h_{ik}^{-1}|$ ретінде Maple $i = 1,2,...,7$ кезінде мыналарды береді:

$$1.4 \cdot 10^5, 5.5 \cdot 10^6, 5.3 \cdot 10^7, 2.1 \cdot 10^8, 3.8 \cdot 10^8, 3.3 \cdot 10^8, 1.08 \cdot 10^8.$$

Осыдан

$$\|H_7^{-1}\| = \max_{1 \le i \le 7} \sum_{k=1}^{7} |h_{ik}^{-1}| = 3.8 \cdot 10^8.$$

Демек, шынында да H_7 Гильберт матрицасы өте нашар шартталынған:

$$cond(H_7) = \|H_7\| \cdot \|H_7^{-1}\| \approx 10^9.$$

Қорытынды. Жалпы жағдайда тіпті матрицалық есептерде де орнықсыздық құбылысы орын алып қалу ықтималдығына көз жеткіздік. Матрицалық есептерде орнықсыздыққа матрицаның шартталу саны себепші болатыны жайлы теориялық болжамды компьютерде тексеріп, растадық. Гильберт матрицасы сияқты мысалдарды осылайша талдап, шартталу санын қолмен есептеу техникалық тұрғыдан дерлік мүмкін емес еді. Осыдан компьютерлік технологиялардың артықшылығы да айқын болды.

Программа кодтары. Мақаладағы нәтижелер Maple бағдарламалау жүйесі көмегімен алынды [5]. **Гильберт матрицасына қатысты программа кодтарын** көрсете кетейік:

Гильберт матрицасы

> $H := HilbertMatrix(7);$

$$H := \begin{bmatrix} 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{3} & \frac{1}{4} & \frac{1}{5} & \frac{1}{6} & \frac{1}{7} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{3} & \frac{1}{4} & \frac{1}{5} & \frac{1}{6} & \frac{1}{7} & \frac{1}{8} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{4} & \frac{1}{5} & \frac{1}{6} & \frac{1}{7} & \frac{1}{8} & \frac{1}{9} \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{5} & \frac{1}{6} & \frac{1}{7} & \frac{1}{8} & \frac{1}{9} & \frac{1}{10} \\ \frac{1}{5} & \frac{1}{6} & \frac{1}{7} & \frac{1}{8} & \frac{1}{9} & \frac{1}{10} & \frac{1}{11} \\ \frac{1}{6} & \frac{1}{7} & \frac{1}{8} & \frac{1}{9} & \frac{1}{10} & \frac{1}{11} & \frac{1}{12} \\ \frac{1}{7} & \frac{1}{8} & \frac{1}{9} & \frac{1}{10} & \frac{1}{11} & \frac{1}{12} & \frac{1}{13} \end{bmatrix}$$

Жүйенің ауытқымаған шешімі

> $x := Vector([1, 2, 3, 4, 5, 6, 7])$

$$x := \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \\ 6 \\ 7 \end{bmatrix}$$

Жүйенің ауытқымаған оң жағы

> $b := simplify(MatrixVectorMultiply(H, x))$

$$b := \begin{bmatrix} 7 \\ \frac{1479}{280} \\ \frac{5471}{1260} \\ \frac{3119}{840} \\ \frac{22549}{6930} \\ \frac{16081}{5544} \\ \frac{157309}{60060} \end{bmatrix}$$

Жүйенің ауытқыған оң жағы

$> b_{\varepsilon} := b + Vector\left(\left[\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3, \varepsilon_4, \varepsilon_5, \varepsilon_6, \varepsilon_7\right]\right)$

$$b_{\varepsilon} := \begin{bmatrix} 7 + \varepsilon_1 \\ \frac{1479}{280} + \varepsilon_2 \\ \frac{5471}{1260} + \varepsilon_3 \\ \frac{3119}{840} + \varepsilon_4 \\ \frac{22549}{6930} + \varepsilon_5 \\ \frac{16081}{5544} + \varepsilon_6 \\ \frac{157309}{60060} + \varepsilon_7 \end{bmatrix}$$

Жүйенің ауытқыған шешімі

$> x_{\varepsilon} := MatrixVectorMultiply\left(MatrixInverse(H), b_{\varepsilon}\right)$

$> evalf\left(subs\left(\varepsilon_1 = 0, \varepsilon_2 = 10^{-9}, \varepsilon_3 = 10^{-8}, \varepsilon_4 = 10^{-7}, \varepsilon_5 = 0, \varepsilon_6 = 0, \varepsilon_7 = 0, b_{\varepsilon} - b\right)\right) :$

$> x1 := evalf\left(subs\left(\varepsilon_1 = 0, \varepsilon_2 = 10^{-9}, \varepsilon_3 = 10^{-8}, \varepsilon_4 = 10^{-7}, \varepsilon_5 = 0, \varepsilon_6 = 0, \varepsilon_7 = 0, x_{\varepsilon}\right)\right)$

$$x1 := \begin{bmatrix} 0.9971470240 \\ 2.109758432 \\ 1.969859280 \\ 7.927288960 \\ -2.091330400 \\ 12.05370427 \\ 5.031929896 \end{bmatrix}$$

Ауытқыған шешімнің қателігі

$>$ **for i from 1 to 7 do** $otn\_pogr[i] := \mathbf{100} \cdot \mathrm{abs}\left(\frac{x1[i] - x[i]}{x[i]}\right)$ **end do**:

> $plot([[n, otn\_pogr[n]] \$ n = 1..7], color = blue, thickness = 3)$

Гильберт матрицасының нормасы

>

```
for i from 1 to 7 do
 s[i] := 0;
 for k from 1 to 7 do
 s[i] := s[i] + abs(H[i, k]);
 end do;
 print(evalf(s[i])) :
end do:
```

2.592857143
1.717857143
1.328968254
1.095634921
0.9365440115
0.8198773449
0.7301337551

> $H\_norm := evalf(\max(s[1], s[2], s[3], s[4], s[5], s[6], s[7]))$

$H\_norm := 2.592857143$

Кері матрицаның нормасы

>

```
for i from 1 to 7 do
 s[i] := 0;
 for k from 1 to 7 do
 s[i] := s[i] + abs(MatrixInverse(H)[i, k]);
 end do;
 print(evalf(s[i])) :
end do :
```

$1.38775\ 10^{5}$
$5.526864\ 10^{6}$
$5.3241300\ 10^{7}$
$2.07100320\ 10^{8}$
$3.79964970\ 10^{8}$
$3.28592880\ 10^{8}$
$1.07975868\ 10^{8}$

> $H\_inv\_norm := evalf(\max(s[1], s[2], s[3], s[4], s[5], s[6], s[7]))$

$H\_inv\_norm := 3.79964970\ 10^{8}$

Гильберт матрицасының шартталу саны

> $cond\_H := H\_norm \cdot H\_inv\_norm$

$cond\_H := 9.851948866\ 10^{8}$

References

1. Berezin I.S., Zhidkov N.P. Metody vychislenij [Calculation methods]. Volume 2. - Moscow: GIFML, 1959. - 620 p. [in Russian].
2. Vladimirov V.S. Uravnenija matematicheskoj fiziki [Equations of mathematical physics]. - Moscow: Nauka, 1981. - 512 p. [in Russian].
3. Reshetnyak Yu.G. Kurs matematicheskogo analiza [The course of mathematical analysis]. Part I. Book 2. - Novosibirsk: Publishing house of IM SB RAS, 1999. - 512 p. [in Russian].
4. Demmel J.W. Applied numerical linear algebra. – Berkeley: University of

California, 1997. – 430 p.
5. Borwein J.M., Skerritt M.P. An introduction to modern mathematical computing. With Maple. - New York: *Springer*, 2011. – 216 p.

Материал редакцияға 02.12.21 түсті.

Н.А. Абиев, М.Т. Иманбекова

Таразский региональный университет им. М.Х. Дулати, Тараз, Казахстан

ИНТЕРПРЕТАЦИЯ ЯВЛЕНИЯ НЕУСТОЙЧИВОСТИ В СИСТЕМАХ АНАЛИТИЧЕСКИХ ВЫЧИСЛЕНИЙ

Аннотация. В данной статье рассматриваем понятие неустойчивости, являющееся одним из важных понятий теории некорректно поставленных задач. Приводится компьютерная интерпретация устойчивости для случая матричных операторов. С помощью системы аналитических вычислений Maple раскрывается смысл важной характеристики матриц, называемой числом обусловленности. В качестве примера такое число вычислено для плохо обусловленных матриц Гильберта. Все алгоритмы реализованы в виде программ, результаты показаны на графиках.

Ключевые слова: некорректная задача, возмущение, неустойчивость, число обусловленности матрицы, матрицы Гильберта.

N.A. Abiev, M.T. Imanbekova

M.Kh. Dulaty Taraz Regional University, Taraz, Kazakhstan

INTERPRETATION OF UNSTABILITY PHENOMENON IN ANALYTICAL COMPUTING SYSTEMS

Abstract. In the paper we consider the concept of unstability, one of the important concepts of ill possened problems. An interpretation of unstability is offered in the case of matrix operators. The sense of an important term called the condition number of a matrix is clarified in Maple analytical computing system. As an example such a number for Hilbert matrices was computed. Computer implementations of all algorithms have been carried out and results are depicted in graphs.

Keywords: ill possened problem, perturbation, unstability, the condition number of a matrix, Hilbert matrices.