

FTAMP 30.15.35

А.Т. Жақаш<sup>1</sup> – негізгі автор, | ©  
Р.Ж. Абдраимов<sup>2</sup>, Э.А. Джакашова<sup>3</sup>



<sup>1</sup>Техн. ғылым. канд., доцент, <sup>2</sup>Магистрант, <sup>3</sup>Аға оқытушы



М.Х. Дулати атындағы Тараз өңірлік университеті



Тараз қ., Қазақстан Республикасы



<sup>1</sup>zhakash58@mail.ru

<https://doi.org/10.55956/JCSM1893>

## ГОЛОНОМДЫ БАЙЛАНЫСТАҒЫ МЕХАНИЗМДЕР ҚОЗҒАЛЫСЫНЫҢ ТЕНДЕУЛЕРІ

**Аннотация.** Жалпы, механизмдердің қозғалысын қарастырғанда, оларға кинематикалық және күштік талдау жасағанда оларда болатын жетекші немесе бастапқы тиектің қозғалыс заңдылықтарын білу, атап айтқанда жалпылама координаттардың уақытқа тәуелділігін білу өте маңызды. Жұмыста бұл тәуелділіктер динамиканың екінші есебінен, яғни әсер етуші күштерді біле отырып, қозғалыс заңдылықтарын анықтаудан шығарылды.

**Тірек сөздер:** механизмдер, голономды байланыстар, механизмдердің еркіндік дәрежесі, кинетикалық энергия, инерциялық момент, келтірілген масса, келтірілген күштер, Лагранждың екінші ретті теңдеуі.



Жақаш, А.Т. Голономды байланыстағы механизмдер қозғалысының теңдеулері [Мәтін] / А.Т. Жақаш, Р.Ж. Абдраимов, Э.А. Джакашова // Механика және технологиялар / Ғылыми журнал. – 2021. – №1(71). – Б.118-123. <https://doi.org/10.55956/JCSM1893>

**Кіріспе.** Механизм тиектеріне берілген күштердің әсер етуінен болатын бастапқы тиектің қозғалыс заңдылықтарын анықтауда механизмдер қозғалысының теңдеулерін қолданады. Голономды байланыстағы механизмдер қозғалысын өрнектейтін теңдеулердің саны, оның еркіндік дәрежесінің санына тең.

Механизмдер қозғалысының теңдеулері әртүрлі формада берілуі мүмкін. Егер еркіндік дәрежесі төмен, яғни бірге тең механизмдер үшін жүйенің кинетикалық энергиясының өзгеруі туралы теорема негізінде құрған ыңғайлы болып келеді [1].

Бұл теорема бойынша механизм қозғалысының теңдеуінің интегралдық түрі келесі түрде өрнектеледі

$$\sum_{i=1}^n A_i = \sum_{i=1}^n T_i - \sum_{i=1}^n T_{i_0}, \quad (1)$$

мұндағы  $n$ -механизмнің қозғалатын тиектерінің саны,  $A_i$ -сырттан әсер ететін күштердің жұмысы,  $T_i$ -тиектердің қарастырып отырған уақыт аралығындағы соңғы кезіндегі кинетикалық энергиясы,  $T_{i_0}$ -тиектің бастапқы кезіндегі

кинетикалық энергиясы. (1)-ші теңдеуді механизм қозғалысының дифференциалдық теңдеулер интегралдау арқалы алуға болады, ал (1) теңдеуін механизм қозғалысының интегралдық түрдегі теңдеуі деп атайды.

(1) теңдеуі  $n$  тиектен тұратын жазық механизмдер үшін күрделі болып келеді. Себебі әр тиек үшін есептеулер жүргізіп, оларды қосып отыру керек. Сондықтан, еркіндік дәрежесі бірге тең жазық механизм үшін әр тиекке қатысты алдын ала қосу әрекеттерін жасап алсақ, жоғарыдағы теңдеуді оңай құруға болады. Ол үшін (1) теңдеуді соған пара-пар бір тиектің қозғалыс заңдылығымен ауыстыру арқылы іске асыруға болады. Ауыстырылатын тиектің жалпылама координатасы кез-келген уақытта механизмнің жалпылама координатасымен дәл келеді. Бірінші механизмнің бастапқы тиегі айналмалы қозғалыс жасайды деп қарастырайық. Онда (1) механизм қозғалысының теңдеуін соған пара-пар айналмалы қозғалыс жасайтын бір тиектің қозғалыс заңдылығымен алмастыруға болады және ол тиекті *келтіру тиегі* деп атаймыз. Оның айналу осіне қарағандағы инерциялық моментін  $J_k$  деп белгілейік және оны келтірілген инерциялық момент деп атайды. Келтіру тиегіне әсер ететін сыртқы күштер мен күш моменттерін бір келтірілген  $M_k$  моментімен алмастырамыз.

**Зерттеу шарттары мен әдістері.** Барлық уақытта берілген қанағаттандыратын келтірілген инерциялық момент  $J_k$  мен келтірілген  $M_k$  моментінің шамаларын есептеуге болатынын көрсетейік. Яғни, бұл жағдайда келтіру тиегінің жалпылама координатасы берілген механизмнің жалпылама координатасына барлық уақытта сәйкес келеді.

Ол үшін келтірілген тиек қозғалысының теңдеуін интегралдық формада жазайық. Бұл жерде жалпылама координат  $\varphi_0$  дан  $\varphi$  дейін, ал келтірілген инерциялық момент  $J_{k_0}$  ден  $J_k$  дейін өзгереді деп жазамыз.

$$\int_{\varphi_0}^{\varphi} M_k d\varphi = \frac{J_k \omega^2}{2} - \frac{J_{k_0} \omega_0^2}{2}, \quad (2)$$

мұндағы  $\omega$ -келтірілген тиектің бұрыштық жылдамдығы,  $\omega_0$ -бастапқы бұрыштық жылдамдық. (1.3) және (1.4) теңдеулері өзара тепе-теңдікте болуы үшін келесі екі шарттың орындалуы қажет және жеткілікті

$$\int_{\varphi_0}^{\varphi} M_k d\varphi = \sum_{i=0}^n A_i \quad (3)$$

$$\frac{J_k \omega^2}{2} = \sum_{i=1}^n T_i \quad (4)$$

Бұл жерде айта кету керек, егер (3) шарт орындалса, онда кез келген уақытта келесі теңдеуде орындалады, яғни

$$\frac{J_{k_0} \omega_0^2}{2} = \sum_{i=1}^n T_{i_0}$$

(3) теңдеуден келтірілген күш моментін  $M_k$  табамыз, ал (4) келтірілген инерциалдық момент  $J_k$  таба аламыз:

$$M_k = \sum_{i=0}^n \left[ F_i \frac{v_i}{\omega} \cos(F_i, ^{\wedge} v_i) + M_i \frac{\omega_i}{\omega} \right] \quad (5)$$

Есептелетін келтірілген моменттің таңбасы онда терісте болуы мүмкін. Егер есептеу таңбасы теріс болса, онда келтірілген  $M_k$  моментінің бағыты бұрыштық жылдамдықтың бағытына қарсы.

Жүйенің келтірілген күшімен келтірілген массасы жоғарыдағы формулалар сияқты анықталады:

$$F_k = \sum_{i=1}^n \left[ F_i \frac{v_i}{v} \cos(F_i, ^\wedge v) + M_i \frac{\omega_i}{v} \right], \quad (6)$$

$$m_k = \sum_{i=1}^n \left[ m_i \left( \frac{v_{si}}{v} \right)^2 + J_{si} \left( \frac{\omega_i}{v} \right)^2 \right], \quad (7)$$

мұндағы  $v$ -бастапқы тиектің сызықты жылдамдығының шамасы.

Жалпы, механизмдердің динамикалық немесе математикалық моделін құру үшін келтіру нүктесі ретінде механизмнің кез-келген тиегінің нүктесін алуға болады. Сондықтан механизмнің келтірілген массасы деп берілген нүктеге түсіреміз. Бұл жағдайда бұл нүктенің кинетикалық энергиясы механизмдердің тиектерінің энергиясына тең болуы шарт. Олай болса, келтірілген күш деп, элементар жұмыстар теңдігінен шығатын, шартты түрде берілген нүктеге түсірілген күшті айтамыз.

Келтірілген масса айнымалы болуы мүмкін, егер жылдамдықтар қатынасы айнымалы шамалар болса, яғни тиектердің орыналасуына тәуелді болған жағдайда.

**Зерттеу нәтижелері.** Енді кеңістік механизмдер үшін келтірілген күштер мен массалардың анықталу жолдарын қарастырайық. Ол үшін, кеңістікте қозғалыс жасайтын механизмдердің тиектерінің кинетикалық энергиясын анықтауға бастаған дұрыс. Алдын ала, айналмалы қозғалыс жасайтын тиектердің остерге және жазықтықтарға қарағандағы инерциялық моменттерін анықтау керек, яғни  $J_{xi}, J_{yi}, J_{zi}$ -координаттар остеріне қарағандағы және  $J_{x_i y_i}, J_{y_i z_i}, J_{z_i x_i}$ -ортадан тепкіш инерциялық моменттерді.

Онда кез келген тиектің кинетикалық энергиясы:

$$T_i = \frac{1}{2} (m_i v_{si}^2 + J_{xi} \omega_i^2 + J_{yi} \omega_i^2 + J_{zi} \omega_i^2) - J_{x_i y_i} \omega_{x_i} \omega_{y_i} - J_{y_i z_i} \omega_{y_i} \omega_{z_i} - J_{z_i x_i} \omega_{z_i} \omega_{x_i} \quad (8)$$

Бұл жерде айтап айту керек, ортадан тепкіш инерциялық моменттерді нольге айналтыратындай  $x_i y_i z_i$  координаттар остерін таңдап алуға болады. Бұл шарт қанағаттандыратын координаттар осьтерін инерциялардың басты осьтері деп те атайды [2]. Келтіру тиегінің кинетикалық энергиясы мен барлық тиектердің кинетикалық энергияларының теңдігі шартынан және (8) формуланы ескере отырып, келтірілген инерциялық моментті таба аламыз

$$J_k = \sum_{i=1}^n \left[ m_i \left( \frac{v_{si}}{\omega} \right)^2 + J_{xi} \left( \frac{\omega_{xi}}{\omega} \right)^2 + J_{yi} \left( \frac{\omega_{yi}}{\omega} \right)^2 + J_{zi} \left( \frac{\omega_{zi}}{\omega} \right)^2 \right], \quad (9)$$

мұндағы  $\omega$ -бастапқы немесе жетекші тиектің бұрыштық жылдамдығы.

Тура осылай жүйенің келтірілген массасын табамыз

$$m_k = \sum_{i=1}^n \left[ m_i \left( \frac{v_{si}}{v} \right)^2 + J_{xi} \left( \frac{\omega_{xi}}{v} \right)^2 + J_{yi} \left( \frac{\omega_{yi}}{v} \right)^2 + J_{zi} \left( \frac{\omega_{zi}}{v} \right)^2 \right], \quad (10)$$

мұндағы  $v$ -түзу сызықты қозғалыстағы бастапқы тиектің жылдамдығы.

Келтірілген күштер моментінің шамалары келесі формуламен анықталады.

$$M_k = \sum_{i=1}^n [F_i \frac{v_i}{\omega} \cos(F_i, ^\wedge v_i) + M_i \frac{\omega_i}{\omega} \cos(M_i, ^\wedge \omega_i)], \quad (11)$$

мұндағы  $v_i$ - $F_i$  күші түсетін нүктенің жылдамдығы,  $\omega_i$ -кез келген тиектің бұрыштық жылдамдығы,  $M_i$ -тиектерге әсер ететін қос күштер моменттері. Тура осылай келтірілген күшті табамыз

$$F_k = \sum_{i=1}^n [F_i \frac{v_i}{v} \cos(F_i, ^\wedge v_i) + M_i \frac{\omega_i}{\omega} \cos(M_i, ^\wedge \omega_i)] \quad (12)$$

Кейбір жағдайларды, механизм қозғалысының теңдеуін интегралдық формада емес дифференциалдық түрде қолданған ыңғайлы болуы мүмкін. Бұл теңдеуді кинетикалық энергия теңдеуінің дифференциалдық формасынан алуға болады, яғни

$$dA = dT \quad (13)$$

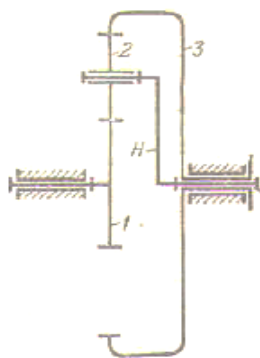
Еркіндік дәрежесі жоғары голономды байланыстағы механизмдер қозғалысының теңдеуін құру үшін негізінен Лагранждың 2-ші ретті теңдеуін қолданады [2].

Бұл жерде, жалпылама күштерді мүмкін орын ауыстыруларда анықтау үшін, жүйеге әсер ететін күштердің элементар жұмысының тепе-теңдік шарттарын қолданамыз. Механизмнің тиектеріне әсер ететін сыртқы күштердің мүмкін орын ауыстыруларда келесі түрде анықталады:

$$\sum_{i=1}^n Q_i \delta q_i = \sum_{j=1}^n (F_{jx} \delta x_j + F_{jy} \delta y_j + F_{jz} \delta z_j), \quad (14)$$

мұндағы  $F_{jx}$ ,  $F_{jy}$ ,  $F_{jz}$ - $x$ ,  $y$ ,  $z$  остеріне түсірілген сыртқы  $F_j$  күшінің проекциялары;  $\delta x$ ;  $\delta y$ ;  $\delta z$ ;-күштердің түсу нүктесінің мүмкін орын ауыстыруларының проекциялары.

Еркіндік дәрежесі екіге тең келесі механизмнің қозғалыс теңдеуін құруды қарастырайық. Еркіндік дәрежесі екіге тең келесі тиісті механизмді қарастырайық (1-сурет).



Сурет 1. Тиісті дифференциалды механизм

Қарастырып отырған жазық тиісті механизм үшін Лагранждың 2-ші ретті теңдеуі келесі түрде өрнектеледі.

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial T}{\partial \omega_1} \right) - \frac{\partial T}{\partial \varphi_1} = M_{k_1}, \quad (15)$$

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial T}{\partial \omega_H} \right) - \frac{\partial T}{\partial \varphi_H} = M_{k_H}, \quad (16)$$

мұндағы  $\varphi_1$ ,  $\varphi_H$ -1-ші жетекші  $H$ -тың бұрыштық бұрылулары,  $\omega_1$ ,  $\omega_H$ -сол тиектердің бұрыштық жылдамдықтары,  $T$ -механизмнің жалпы кинетикалық энергиясы,  $M_{k_1}$ ,  $M_{k_H}$ -жалпылама күштер. Оларды келтірілген моменттер депте айтуға болады.

Қарастырып отырған механизмнің кинетикалық энергиясы келесі түрде анықталады:

$$T = \frac{1}{2} (J_1 \omega_1^2 + K J_2 \omega_2^2 + K m_2 R_H \omega_H^2 + J_H \omega_H^2 + J_3 \omega_3^2), \quad (17)$$

мұндағы  $J_1$ ,  $J_2$ ,  $J_3$ ,  $J_H$ -1, 2, 3,  $H$  тиектердің ауырлық орталары арқалы өтетін остерге қарағандағы инерциялық моменттері,  $K$ -сателлиттер саны,  $m_2$ -бір сателлиттің массасы,  $R_H$ -сателлиттің центрінің траекториясының радиусы.

Аралық тиек болатын 3-ші тиектің бұрыштық жылдамдығын беріліс қатынастары арқалы жалпылама жылдамдықтар  $\omega_1$  және  $\omega_H$  арқалы өрнектеуге болады.

$$\omega_3 = U_{31}^{(H)} \cdot \omega_1 + U_{2H}^{(1)} \cdot \omega_H$$

Бұрыштық жылдамдық  $\omega_2$ -де осылай өрнектеуге болады

$$\omega_2 = U_{21}^{(H)} \cdot \omega_1 + U_{2H}^{(1)} \cdot \omega_H$$

$\omega_2$  мен  $\omega_3$  (2.6) теңдеуге қойып, келесі түрлендірілген кинетикалық энергияны аламыз:

$$2T = J_{11} \omega_1^2 + 2J_{1H} \omega_1 \omega_H + J_{HH} \omega_H^2, \quad (18)$$

мұндағы

$$J_{11} = J_1 + K J_2 [U_{21}^{(H)}]^2 + J_3 [U_{31}^{(H)}]^2$$

$$J_{1H} = K \cdot J_2 U_{21}^{(H)} \cdot U_{2H}^{(1)} + J_3 U_{31}^{(H)} \cdot U_{3H}^{(1)},$$

$$J_{HH} = K \cdot J_2 [U_{2H}^{(1)}]^2 + K m_2 R_H^2 + J_H + J_3 [U_{3H}^{(1)}]^2.$$

$J_{11}$ ,  $J_{1H}$ ,  $J_{HH}$ -инерциялық моменттерін механикада инерциялық коэффициенттер деп атайды. Біз қарастырып отырған механизмде барлық инерциялық коэффициенттердің жалпыламалы координаттар  $\varphi_1$  мен  $\varphi_H$  тәуелсіздігін атап айтуымыз керек. Осыдан

$$\frac{\partial T}{\partial \varphi_1} = 0, \quad \frac{\partial T}{\partial \varphi_H} = 0 \quad (19)$$

(19) теңдеуімен өрнектелетін кинетикалық энергиядан  $\omega_1$  және  $\omega_H$  бойынша дербес туындыларын табайық

$$\frac{\partial T}{\partial \omega_1} = \frac{1}{2} (2J_{11} \omega_1 + 2J_{1H} \omega_H + 0) = J_{11} \omega_1 + J_{1H} \omega_H,$$

$$\frac{\partial T}{\partial \omega_H} = \frac{1}{2} (2J_{1H}\omega_1 + 2J_{HH}\omega_H) = J_{1H}\omega_1 + J_{HH}\omega_H. \quad (20)$$

(20) теңдеуін уақыт бойынша дифференциалдайық

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial T}{\partial \omega_1} \right) = J_{11} \frac{d\omega_1}{dt} + J_{1H} \frac{d\omega_H}{dt} = J_{11}\varepsilon_1 + J_{1H}\varepsilon_H, \quad (21)$$

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial T}{\partial \omega_H} \right) = J_{1H} \frac{d\omega_1}{dt} + J_{HH} \frac{d\omega_H}{dt} = J_{1H}\varepsilon_1 + J_{HH}\varepsilon_H, \quad (22)$$

мұндағы  $\varepsilon_1, \varepsilon_H$  - 1-ші және жетекші тиектерінің бұрыштық үзеулері.

**Қорытынды.** Табылған (22), (20) өрнектерін (15-16) теңдеуіне қойсақ механизм қозғалысының дифференциалдық теңдеулерін аламыз:

$$J_{11}\varepsilon_1 + J_{1H}\varepsilon_H = M_{k_1}, \quad (23)$$

$$J_{1H}\varepsilon_1 + J_{HH}\varepsilon_H = M_{k_2}, \quad (24)$$

(2.4) теңдеуіндегі келтірілген күш моменттері механизмге әсер ететін сыртқы күштердің жұмыстарының, сол күштердің элементарлық жұмыстары теңдігінің шарттарынан анықталады.

#### Әдебиеттер тізімі

1. Бабаков, И.М. Теория колебаний [Текст] / И.М. Бабаков. - М.: Наука, 1968. - 559 с.
2. Фролов, К.В. Теория механизм и машин [Текст] / К.В. Фролов [и др.]. - М.: Наука, 1984. - 493 с.

Материал редакцияға 13.03.21 түсті.

**А.Т. Жақаш, Р.Ж. Абдраимов, Э.А. Джакашова**

*Таразский региональный университет им. М.Х. Дулати, г. Тараз, Казахстан*

#### УРАВНЕНИЯ ДВИЖЕНИЯ МЕХАНИЗМОВ С ГОЛОНОМНЫМИ СВЯЗЯМИ

**Аннотация.** Для кинематического и силового анализа необходимо знание законов движения начальных звеньев, т.е. зависимости обобщенных координат от времени. Эти зависимости выведены в работе из решения второй задачи динамики.

**Ключевые слова:** механизмы, голономные связи, степень свободы механизма, кинетическая энергия, момент инерции, приведенные массы, приведенная сила, уравнение Лагранжа 2-го рода.

**A.T. Zhakash, R.J. Abdaimov, E. Jakashova**

*Taraz Regional University named after M.Kh. Dulaty, Taraz, Kazakhstan*

#### EQUATIONS OF MOTION OF MECHANISMS WITH VOICE CONNECTIONS

**Abstract.** For kinematic and force analysis, it is necessary to know the laws of motion of the initial links, i.e. dependence of the generalized coordinates on time. These dependencies are found from the solution of the second problem of dynamics.

**Keywords:** mechanisms, holonomic constraints, degree of freedom of a mechanism, kinetic energy, moment of inertia, reduced masses, reduced force, Lagrange equation of the second kind.

#### References

1. Babakov I.M. Teoriya kolebaniy [Theory of oscillations]. - Moscow: Nauka. 1968. - 559 p. [in Russian].
2. Frolov K.V. Teoriya mekhanizm i mashin [The theory of mechanism and machines]. - Moscow: Nauka, 1984. - 493 p. [in Russian].