МРНТИ 27.33.17

**Ж.У. Сугиров[1]** – *основной автор*,
**Г.Г. Байсарова[2], С.М. Оспанова[3], М.К. Суйменова[4], Г.И. Есболай[5], А.И. Избасар[6]**



*[1]Д-р техн. наук, профессор, [2,3]Д-р PhD, ст. преподаватель, [4,5,6]Ст. преподаватель*
ORCID *[1]https://orcid.org/0000-0002-8109-1658, [2]https://orcid.org/0000-0002-8145-1656, [3]https://orcid.org/0000-0002-8345-1678, [4]https://orcid.org/0000-0002-8122-1675, [5]https://orcid.org/0000-0002-8125-1631, [5]https://orcid.org/0000-0002-8156-1687*
*Каспийский университет технологий и инжиниринга им. Ш.Есенова*
*г. Актау, Казахстан*
@ *[1]sugirov-56@mail.ru*

https://doi.org/10.55956/DZGK1620

# ОПРЕДЕЛЕНИЕ ОСНОВНЫХ УРАВНЕНИЙ НЕЛИНЕЙНЫХ ДЕФОРМАЦИЙ СТЕРЖНЕЙ ПРИ ТЕРМОМЕХАНИЧЕСКИХ НАГРУЗКАХ

**Аннотация.** В статье решается задача по определению нелинейной деформации стержня при термомеханической нагрузке. Рассмотрен случай плоской задачи, когда стержень будет деформироваться в плоскости под воздействием механических нагрузок и неравномерных температурных полей. Для изогнутых стержней разработаны основные уравнения, которые дают возможность получить новые дифференциальные уравнения, распространяемые на прямые стержни, постановка в которых $\Theta_0=0$, и $\rho_0$ приведет к стремлению к бесконечности.

**Ключевые слова:** нелинейная деформация, стержень, термомеханическая нагрузка, температурное поле, дифференциальное уравнение.

*Сугиров, Ж.У. Определение основных уравнений нелинейных деформаций стержней при термомеханических нагрузках [Текст] / Ж.У. Сугиров, Г.Г. Байсарова, С.М. Оспанова, М.К. Суйменова, Г.И. Есболай, А.И. Избасар // Механика и технологии / Научный журнал. – 2022. – №1(75). – С.87-92.* https://doi.org/10.55956/DZGK1620

**Введение.** Исследуем деформирование стержня с имеющейся начальной кривизной. Примем следующие обозначения для радиуса кривизны у термической упругой линии. Обозначим деформацию стержня до и после буквами $\rho_0$ и $\rho_a$. А угол наклона к оси z термически упругой линии до и после деформаций выражениями $\theta_0$ и $\theta$ соответственно. Также обозначим перемещение вдоль оси z - буквой w, а перемещение вдоль оси y - буквой v.

Очевидно, что выражения $w=w(l)$, $v=v(l)$, $\rho=\rho(l)$, $\theta=\theta(l)$, где l - величина длины дуги деформированной термической упругой линии (является сопутствующей координатой), или $w=w(l_0)$, $v=v(l_0)$, $\rho=\rho(l_0)$, $\theta=\theta(l_0)$, где $l_0$- величина длины дуги недеформированной термически упругой линии. Оси y,z были выбраны таким образом, чтобы плоскость yz совпала с плоскостью изгиба [1].

Деформацию элементарного отрезка AB, имеющую длину $dl_0$ будут определять следующим выражением:

$$\varepsilon_o = (d_l - d_{l_o})/d_{l_o} \qquad (1)$$

откуда, можно определить длину отрезка после деформации $d_l$:

$$d_l = d_{l_o}(1+\varepsilon_o)$$

где $\quad d_l = \rho d\theta, \quad dl_o = \rho_o d\theta_o \qquad (2)$

**Условия и методы исследований.** Рассмотрев геометрию термоупругой линии, находящейся в деформированном положении, можно записать в виде следующего выражения:

$$dll_o sin\theta_o + dv = dl sin\theta, \;\; dl_o cos\theta_o + dw = dl cos\theta \qquad (3)$$

которое с учетом соотношения (1) будет принимать вид:

$$\frac{dv}{dl_o} = (1+\varepsilon_o)sin\theta - sin\theta_o, \;\; \frac{\mathrm{dv}}{\mathrm{d}l_o} = (1+\varepsilon_o)cos\theta - cos\theta_o \qquad (4)$$

Используя гипотезу плоского сечения, рассмотрев изменение деформации элементарного отрезка СД, расположенной на длине у от термической упругой линии, дающей возможность установить картину распределения деформации в поперечном сечении.

Деформацию СД слоя определяют:

$$\varepsilon_{cd} = \frac{(\rho+y)d\theta - (\rho_o+y)d\theta_o}{(\rho_o+y)d\theta_o} \qquad (5)$$

$$\varepsilon_{cd} = \frac{(\rho+y)d\theta}{\left[\left(1+\frac{y}{\rho_o}\right)\rho_o d\theta_o\right]} - 1$$

Из этих формул видно, что для стержней с $y/\rho_0<1$ (не рассматривая стержни совсем большой кривизны, у которых величины у и $\rho_0$ соизмеримы). В этом случае, когда $1/(1+y/\rho_0)=1-y/\rho_0+(y/\rho_0)^2-\ldots$ и пренебрегая значениями слагаемыми малостями высшего порядка, учитывая последние выражения, то формула (1) примет вид:

$$\varepsilon_{cd} = \varepsilon_o + k_x y \qquad (6)$$

вводя обозначения:

$$k_x = d\theta\left(1-\frac{\rho}{\rho_o}\right)/dl_o$$

или $\quad k_x = (1+\varepsilon_o)\left(\frac{1}{\rho} - \frac{1}{\rho_o}\right) \qquad (7)$

Из последнего приведенного выражения видно, что кривизна после деформации примет вид:

$$\frac{1}{\rho} = \frac{1}{\rho_o} + \frac{k_x}{1+\varepsilon_o} \qquad (8)$$

Далее, воспользовавшись соотношениями (5) и (6) будем иметь:

$$\frac{d\theta}{dl_o} = \frac{1+\varepsilon_o}{\rho_o} + k_x \qquad (9)$$

**Обсуждение научных результатов.** Таким образом окончательно получили выражение дифференциального уравнения для угла наклонов касательной, описывающее вместе с уравнениями (2) геометрию деформирования, возникающие при большом перемещении, с учетом деформаций (растяжения – сжатия) термически упругой линии.

Для определения неизвестных параметров $\varepsilon_0$ и $\kappa_x$, воспользуемся уравнениями равновесия:

$$\int \sigma dF = N, \qquad \int \sigma y dF = M \qquad (10)$$

где: N - нормальная сила; M - значение изгибающего момента в поперечном сечении стержня.

Для решения термически упругой задачи, когда полная деформация будет определяться как сумма упругих $\varepsilon^e$ и температурных $\varepsilon^t$ деформаций ($\varepsilon=\varepsilon^e+\varepsilon^t$). Учитывая закон Гука и величину выражения (4), для напряжения получим:

$$\sigma = E(t)(\varepsilon_o + k_x y) - E(t)\varepsilon^t \qquad (11)$$

где E(t) – значение модуля упругости; t - величина температуры.

В некоторых случаях при исчислении полных деформаций приходится учитывать также дополнительную деформацию $\varepsilon^0$, которая связана с возникающими фазовыми переходами ($\varepsilon=\varepsilon^e+\varepsilon^t+\varepsilon^0$). Так например, для некоторых материалов имеющие память формы в пределах температур термоупругих мартенситовых превращений, вызывающие дополнительные деформации, будут фазовые деформации, вычисление которых производится как $\varepsilon^0=B\sigma(t^m-M_s^m)$, где B и m величины постоянных материала, $M_s$ - величина температуры начального фазового превращения. В этом случае для нахождения напряжения имеем формулу:

$$\sigma = \Phi(t)(\varepsilon_o + k_x y) - \Phi(t)\varepsilon^t \qquad (12)$$

где $\Phi(t)=1/[1/E(t)+B(t^m-M_s^m)]$. При этом в дальнейшем для общности будем использовать уравнение (12).

При подстановки выражения (11) в условия (12), то путем несложных преобразований получим:

$$\varepsilon_o = N/A^* + [\int \varepsilon^t \, \Phi dA]/A^* \qquad k_x = \frac{M}{I^*} + \frac{\int \varepsilon^t}{Ix^*} y\Phi dA \qquad (13)$$

где $A^*=\int\Phi dA$ - величина обобщенной площади, а $I_x^*=\int y^2\Phi dA$ - величина обобщенного момента инерции поперечного сечения.

Далее для того чтобы замкнуть имеющеюся систему уравнений (2), (7) получаем дифференциальные уравнения статики. Исследуем равновесие элемента стержня.

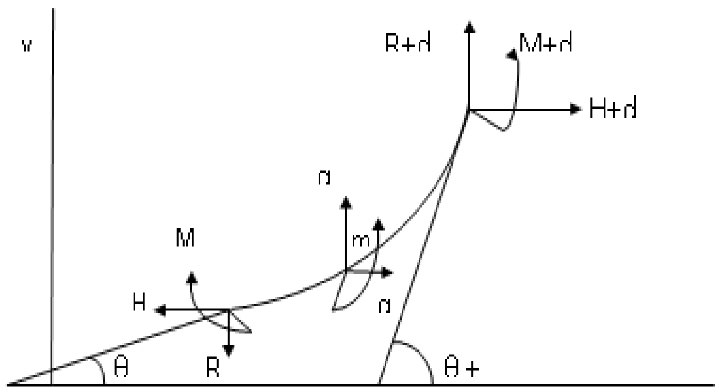


Рис. 1. К выводу уравнений равновесия деформированного элемента стержня

На рисунке 1 обозначения $q_z$, $q_y$ являются составляющими векторов распределенных внешних сил, а m – значение интенсивности внешних изгибающих моментов.

Уравнения статики примут вид:

$$\frac{dM}{dl} = Hsin\theta - Rcos\theta - m$$

$$\frac{dR}{dl} = -q_y\,, \quad \frac{dH}{dl} = -q_z \qquad (14)$$

где: R и T - вертикальная и горизонтальная составляющие векторов усилий в поперечных сечениях стержня.

Тогда эта система уравнений с учетом выражения (1) будет иметь вид:

$$\frac{dM}{dR} = (1+\varepsilon_o)(Hsin\theta - Rcos\theta - m)$$

$$\frac{dR}{dl_o} = -(1+\varepsilon_o)q_y\ , \quad \frac{dH}{dl_o} = -(1+\varepsilon_o)q_z \qquad (15)$$

Тогда нормальную силу N в имеющемся поперечном сечении можно определить с помощью введения значений вертикальных и горизонтальных составляющих усилия.

Рассматривая рисунок 1, можно записать выражение $\overline{N} = \overline{H} + \overline{R}$ или $\overline{N}\cdot\bar{i} = \overline{H}\cdot\bar{i} + \overline{R}\cdot\bar{i}$

Отсюда находим:

$$N = Hcos\theta + Rsin\theta \qquad (16)$$

Поперечную силу в сечении определим по формуле:

$$Q = Hsin\theta - Rcos\theta \qquad (17)$$

В результате вычислений получили формулы системы нелинейных обыкновенных дифференциальных уравнений в случаях плоских изгибов стержней, сопровождающихся термомеханическими нагружениями. Система будет представлена из тремя уравнениями геометрии (2), (7) и тремя уравнениями статики (11) совместно с уравнениями (10) и (12). Как видно, приведенные выше уравнения при $\theta_0=0$ и $\rho_0\to\infty$ дают уравнения, описывающие изгиб прямых стержней.

Из уравнения геометрии (2), (7) получим, что $dl_0 = dz$

$$\frac{dv}{dz} = (1+\varepsilon_0)\sin\theta$$
$$\frac{dw}{dz} = (1+\varepsilon_0)\cos\theta - 1 \tag{18}$$
$$\frac{d\theta}{dz} = \kappa_x$$

Из уравнений статики получим и из системы будем иметь (11):

$$\frac{dM}{dz} = (1+\varepsilon_o)(Hsin\theta - Rcos\theta - m)$$

$$\frac{dR}{dz} = -(1+\varepsilon_o)q_y$$

$$\frac{dR}{dz} = -(1+\varepsilon_o)q_y \tag{19}$$

Радиусы кривизны стержней после деформаций будет определяться по формуле:

$$\rho = \frac{1+\varepsilon_0}{\kappa_x} \tag{20}$$

**Заключение.** Очевидно, что полученные уравнения (13) и (14) совместно с разработанными уравнениями (10) и (11) будут составлять замкнутую систему, описывающие плоский изгиб прямых стержней при термомеханическом нагружениях.

Также можно констатировать, что разработанная система нелинейных обыкновенных дифференциальных уравнений с имеющимися граничными условиями, будет эффективно решаться численными методами, в частности методами продолжения решения по параметрам с параллельной пристрелкой [3].

**Список литературы**

1. Попов, Е.П. Теория и расчет гибких упругих стержней [Текст] / Е.П. Попов. - М.: Наука, 1986. – 296 с.
2. Светлицкий, В.А. Механика стержней [Текст] / В.А. Светлицкий. В 2-х ч. - М.: Высшая школа, 1987. - Ч.1 - 320 с; Ч.2 – 304 с.
3. Коновалов, А.А. Дифференциальные уравнения для больших перемещений пространственного стержня [Текст] / А.А. Коновалов. – Ижевск, 1974.

*Материал поступил в редакцию 25.01.22.*

**Ж.Ө. Сүгіров, Г.Г. Байсарова, С.М. Оспанова, М.К. Сүйменова, Г.И. Есболай, А.И. Ізбасар**

*Ш. Есенов атындағы Каспий технологиялар және инжиниринг университеті, Ақтау қ., Қазақстан*

**ТЕРМОМЕХАНИКАЛЫҚ ЖҮКТЕМЕЛЕР КЕЗІНДЕ ӨЗЕКТЕРДІҢ СЫЗЫҚТЫ ЕМЕС ДЕФОРМАЦИЯЛАРЫНЫҢ НЕГІЗГІ ТЕҢДЕУЛЕРІН АНЫҚТАУ**

**Аңдатпа.** Мақалада термомеханикалық жүктеме кезінде өзектің сызықтық емес деформациясын анықтау мәселесі шешіледі. Механикалық жүктемелер мен біркелкі емес температура өрістерінің әсерінен өзек жазықтықта деформацияланатын жалпақ тапсырма жағдайы қарастырылады. Қисық өзектер үшін негізгі теңдеулер жасалды, олар түзу өзектерге таралатын жаңа дифференциалдық теңдеулерді алуға мүмкіндік береді, олардың орналасуы Ѳ0=0, ал р0 шексіздікке ұмтылады.

**Тірек сөздер**: сызықты емес деформация, өзек, термомеханикалық жүктеме, температура өрісі, дифференциалдық теңдеу.

**Zh.O. Sugirov, G.G. Baysarova, S.M. Ospanova, M.K. Suimenova, G.I. Esbolai, A.I. Izbasar**

*Caspian University of technology and engineering named after Sh. Yessenov Aktau, Kazakhstan*

**CHANGES IN NORMAL STRESSES AND DISPLACEMENTS IN A TRIANGULAR ROD UNDER THERMOMECHANICAL LOADING**

**Abstract.** The article describes a method for determining changes in temperature stresses in the cross section of a triangular rod. The changes of stresses in the rod, and the resulting displacements under the influence of thermomechanical loading on it, are considered. The formula adopted for calculating normal stresses in the distance from the ends of the loose rod is determined. The temperature was distributed symmetrically relative to the axis coordinates . Using the hypothesis of flat sections , the basic properties of moving some arbitrary point of the cross - section of the rod along the existing axis were revealed .

**Keywords**: Normal stresses, displacements, rod, temperature, cross section.

**References**

1. Popov E.P. Teoriya i raschet gibkikh uprugikh sterzhney [Theory and calculation of flexible elastic rods]. - Moscow: Nauka, 1986. - 296 p. [in Russian].
2. Svetlitsky V.A. Mekhanika sterzhney [Mechanics of rods]. In 2 parts. - Moscow: Higher School, 1987. - Part 1 - 320 p; Part 2 - 304 p. [in Russian].
3. Konovalov A.A. Differentsial'nyye uravneniya dlya bol'shikh peremeshcheniy prostranstvennogo sterzhnya [Differential equations for large displacements of a spatial rod]. - Izhevsk, 1974. [in Russian].